MİKRO

İKTİSAT I

Dr. Sanlı ATEŞ

TALEP

TEORİSİ

Talep teorisi, talebi etkileyen çeşitli faktörlerin belirlenmesini amaçlar.

Talep, çok çeşitli faktörlerce eş anlı olarak belirlenir :

- Malın kendi fiyatı
- Tüketici geliri
- Diğer malların fiyatları
- Tüketici zevk ve tercihleri
- Gelir dağılımı
- Nüfusun boyutları ve yapısı
- Kredi kullanım olanakları
- Hükümet politikaları
- Geçmiş dönem talebi

Geleneksel talep teorisi, yukarıdaki faktörlerden yalnızca dört tanesini ele almaktadır:

- Malın kendi fiyatı
- Diğer malların fiyatları
- Tüketici geliri
- Tüketici zevk ve tercihleri

Geleneksel talep teorisi, yalnızca dayanıklı ve dayanıksız ürünlere ait nihai talebi dikkate alır. Nihai talep, tüketim malı ve yatırım malı olmak üzere ikiye ayrılır. Ancak geleneksel talep teorisi, yalnızca tüketim mallarıyla ilgilenmektedir.

Geleneksel talep teorisi, tüketicilerin rasyonel olduğunu varsaymıştır. Gelir ve fiyat verildiğinde tüketici, tüketimini maksimum tatmin ya da fayda sağlayacak şekilde planlar. Bu özellik, fayda maksimizasyonu aksiyomudur.

Geleneksel talep teorisinin diğer varsayımları şunlardır :

- Tüketici tam bilgiye sahiptir
- Tüketici, farklı malların tüketiminden elde edeceği faydaları karşılaştırabilmektedir.

Fayda karşılaştırmasında iki temel yaklaşım vardır :

- Kardinal (sayılabilir) fayda teorisi
- Ordinal (sıralanabilir) fayda teorisi

Kardinalist okul, faydanın ölçülebilir olduğunu öne sürer. Bazı kardinalist iktisatçılar, tam belirlilik altında (piyasa koşulları ve gelir hakkında bilginin tam olması durumu) faydanın parasal olarak, tüketicinin bir birim ek mal için harcamak arzusunda olduğu para miktarı olarak ölçülebileceğini ileri sürmüşlerdir. Diğerleri ise, "UTIL" adını verdikleri bir öznel birimle ölçülmesini önermişlerdir.

Ordinalist okul, faydanın ölçülemeyen bir olgu olduğunu, bireylerin mal tüketiminden elde ettikleri faydaları sıralamasının yeterli olacağını önermiştir. Yani tüketici çeşitli mal demetleri arasında bir tercih sıralaması yapabilmelidir.

Kardinal (Ölçülebilir) Fayda Teorisi

Varsayımlar :

1. Tüketiciler rasyoneldir. Gelir kısıdı altında faydalarını maksimize etmeyi amaçlar.
2. Her bir mala ait fayda ölçülebilir. En uygun fayda ölçü birimi paradır.
3. Paranın marjinal faydası sabittir. Bu varsayım, paranın bir ölçüm standardı olması için gereklidir.
4. Tüketici bir maldan daha fazla tükettikçe, marjinal faydası giderek azalır.
5. Bir sepet malın toplam faydası, o mal sepetini oluşturan mal miktarına bağlıdır: $U = f(x_1, \ldots, x_n)$

Kardinal fayda teorisinde tüketicinin dengesinin nasıl oluştuğunu anlamak için tek mallı bir basit model düşünelim:

Birey ya x malını tüketecektir ya da gelirini saklayacaktır. Bu koşullarda x malının sağladığı marjinal fayda, malın piyasa fiyatına (P_x) eşitlendiğinde, tüketici dengesi oluşmaktadır: $MU_x = P_x$

$MU_x > P_x$ durumunda tüketici daha fazla x malı satın alarak refah düzeyini yükseltebilir. $MU_x < P_x$ durumunda ise bireyin harcama yapmaması rasyonel bir davranıştır.

Kardinal fayda teorisinde dengenin matematiksel elde edilişi şöyledir:

Fayda fonksiyonu : $U = f(x)$

Tüketici x kadar malı P_x birim fiyattan satın alırsa, (xP_x) kadar toplam ödeme yapar. Tüketicinin amacı, malın tüketiminden elde edeceği fayda ile yaptığı harcama arasındaki farkı maksimize etmektir.

$$maxU(x) - (xP_x)$$

Maksimum için x'e göre birinci sıra kısmi türev sıfıra eşitlenir (birinci sıra koşul) :

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x} - \frac{\partial (xP_x)}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial U(x)}{\partial x} = P_x$$

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x} = P_x \quad \text{ya da} \quad U_x = P_x$$

Not: x malının marjinal faydası MU_x ya da U_x olarak gösterilmektedir.

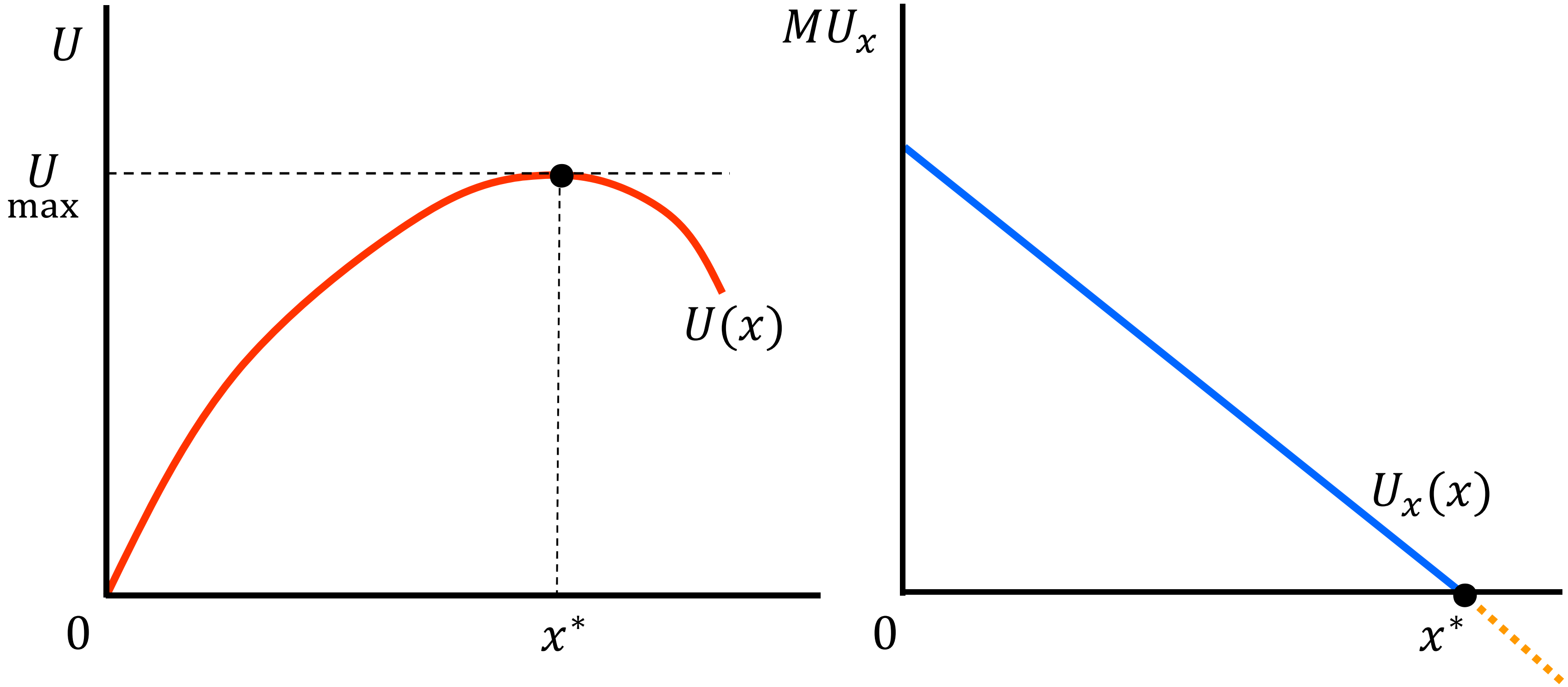
Modelimizdeki mal sayısını birden çok durumuna getirirsek, tüketici dengesi aynı biçimde gerçekleşecektir :

$$\frac{U_x}{P_x} = \frac{U_y}{P_y} = \cdots = \frac{U_n}{P_n}$$

Yani bir birim ek para harcanmasından elde edilen faydanın, tüm mallar için aynı olması gereklidir.

Talep fonksiyonunun elde edilişi, marjinal fayda aksiyomuna dayalıdır. Dördüncü varsayıma göre, tüketim arttıkça, o malın bireye sağladığı marjinal fayda giderek azalmaktadır. Bunu Şekil 1'de görebiliriz.

Şekil 1. Kardinal Fayda Teorisinde Fayda Fonksiyonu

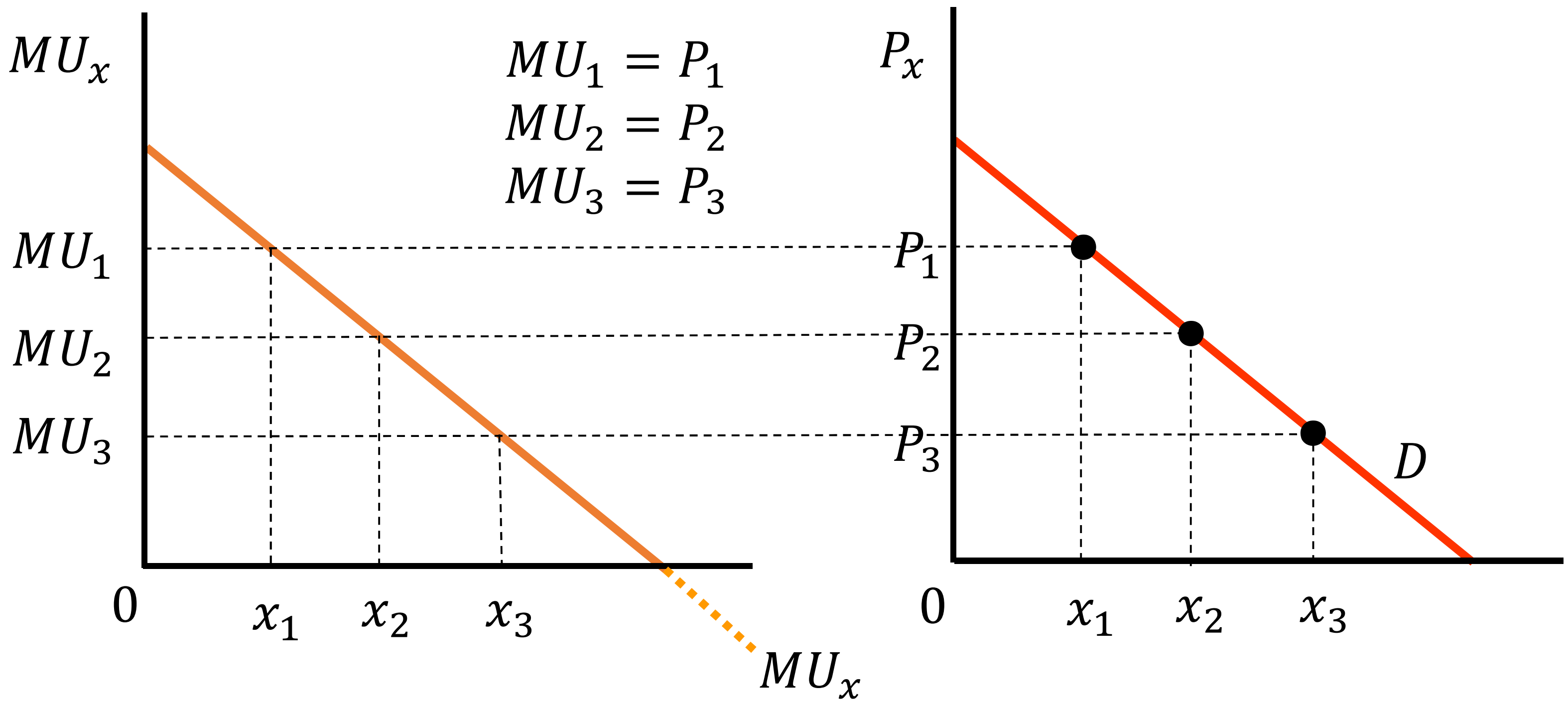


Geometrik olarak *x* malının marjinal faydası (U_x), toplam fayda fonksiyonunun eğimine eşittir:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = U_x$$

Toplam fayda *x* düzeyine kadar azalan bir hızda artmakta, bu tüketim düzeyinden sonra azalmaktadır. Dolayısıyla U_x sürekli azalmakta, *x* tüketim düzeyinde sıfıra ulaşmakta ve bundan sonraki tüketim düzeylerinde negatif değerler almakta, yani *x* malı bireye yarar değil, zarar vermektedir.

Şekil 2. Kardinal Fayda Teorisinde Talep Fonksiyonu



Kardinal fayda teorisi üç temel eksikliğe sahiptir:

- Faydanın nesnel ölçümü zordur.
- Paranın marjinal faydasının sabit olması varsayımı gerçekçi değildir. Bu nedenle de sabit (standart) bir ölçü aracı olamaz.
- Azalan marjinal fayda aksiyomu, bir psikolojik yasa olarak sorgusuzca kabul edilmiştir.

Ordinal (Sıralanabilir) Fayda Teorisi

Varsayımlar:

- Tüketiciler rasyoneldir. Tüketici, geliri ve fiyatlar veri olduğunda kendi faydasını maksimize etmeye çalışır.
- Fayda ordinaldir. Yani tüketici, tükettiği mallardan elde ettiği faydaya (tatmine) göre malları bir tercih sıralamasına koyar.
- Tercihler, orijine göre dışbükey olduğu varsayılan kayıtsızlık eğrileri cinsinden sıralandırılmıştır. Kayıtsızlık eğrileri negatif ve artan bir eğime sahiptir. Kayıtsızlık eğrisi eğiminin negatif işaretlisine, *marjinal ikame oranı* denilmektedir. Kayıtsızlık eğrileri teorisi, azalan marjinal ikame oranı aksiyomuna dayandırılmıştır.
- Tüketicinin elde edeceği fayda, tüketilen mal miktarına bağlıdır:

$$U = f(q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots, q_n)$$

- Tüketici tercihlerinin tutarlığı olduğu varsayılmıştır. Tüketici A’yı B’ye tercih ediyorsa, aynı anda B’yi A’ya tercih edemez. Ayrıca tüketici A’yı B’ye, B’yi C’ye tercih ediyorsa, C’yi A’ya tercih edemez. Buna tercihlerin *geçişlilik* özelliği denilmektedir.

Kayıtsızlık eğrileri teorisinde tüketici dengesinin belirlenmesinde kayıtsızlık eğrisi ve bütçe doğrusu araçları kullanılmaktadır.

Kayıtsızlık eğrisi, tüketiciye aynı (eş) fayda düzeyini sağlaması sonucu, tüketicinin tercih yapmada kayıtsız kaldığı noktaların (belirli mal bileşimlerinin) oluşturduğu eğridir. Çok sayıda kayıtsızlık eğrisinin bulunduğu duruma, kayıtsızlık eğrisi paftası (ya da haritası) denilmektedir. Aynı kayıtsızlık eğrisi üzerinde bulunan mal bileşimleri, aynı (eş) fayda düzeyini sağlar.

Kayıtsızlık eğrileri orijinden uzaklaştıkça, daha yüksek fayda düzeylerini gösterirler. Şekil 2.3, kayıtsızlık eğrilerini göstermektedir.

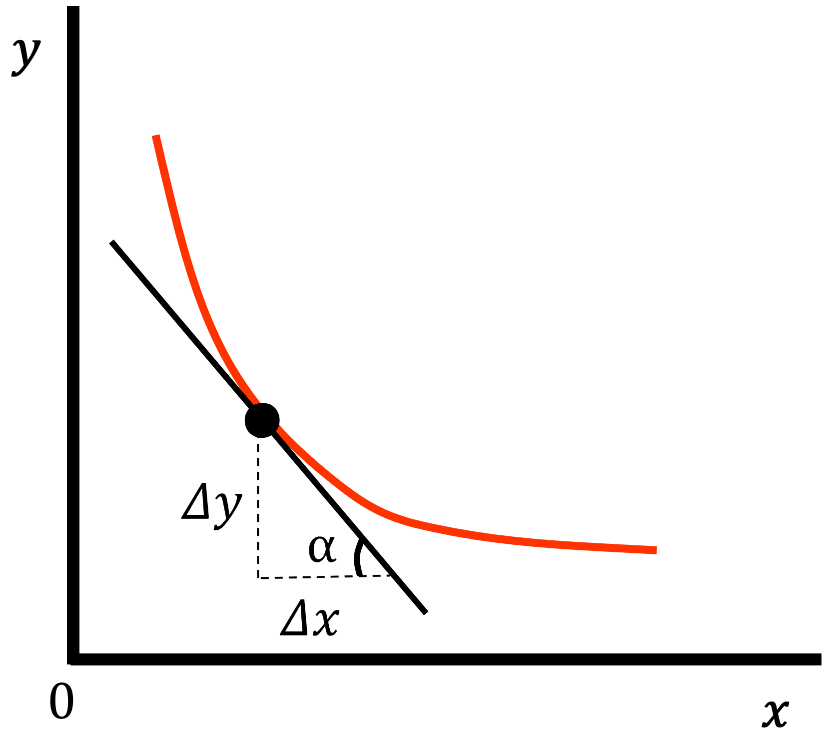
Bu kayıtsızlık eğrilerine göre, x ve y malları birbirleriyle kısmen ikame edilebilirler. Kayıtsızlık eğrisi üzerindeki her hangi bir noktada marjinal ikame oranını (MRS_{xy}) şöyle belirleriz:

$$MRS_{xy} = -\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

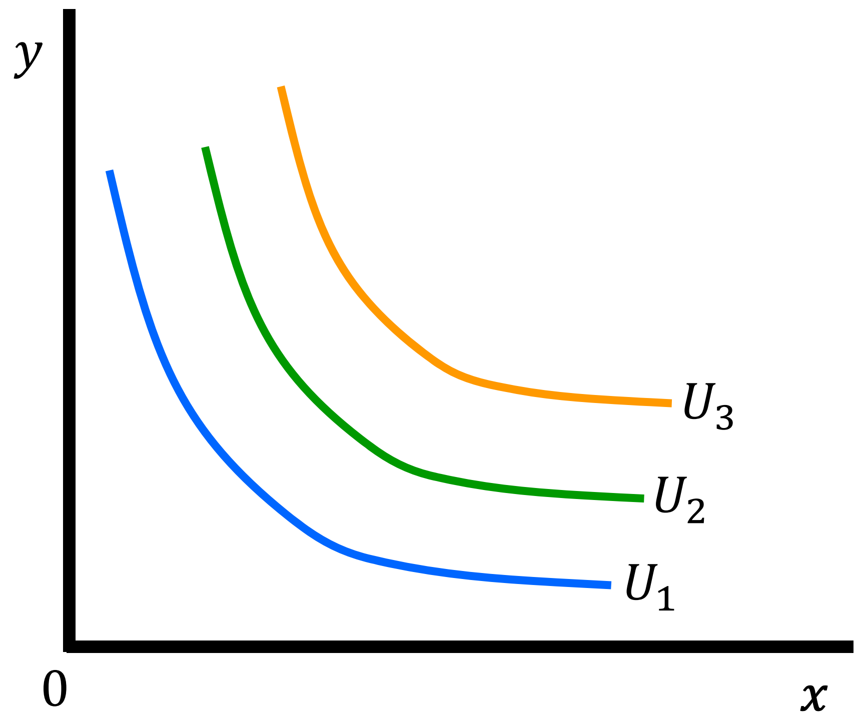
Marjinal ikame oranı, tüketicinin aynı fayda düzeyinde kalabilmesi için Δ birim x karşılığında vazgeçmesi gereken y miktarıdır.

Ordinal fayda teorisi ya da kayıtsızlık eğrileri yaklaşımı, marjinal fayda kavramı yerine marjinal ikame oranı kavramını getirmiş görünmekle beraber, marjinal faydanın bu yaklaşımda da örtük biçimde yer aldığı görülebilir.

Şekil 3. Kayıtsızlık Eğrileri



$$MRS_{xy} = -\frac{\Delta y}{\Delta x}$$



$$U_3 > U_2 > U_1$$

Marjinal ikame oranının matematiksel ispatı şöyledir.

$$U = f(x, y)$$

Fayda fonksiyonunun toplam diferansiyelini alalım.

$$dU = \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial x} dx = U_y dy + U_x dx$$

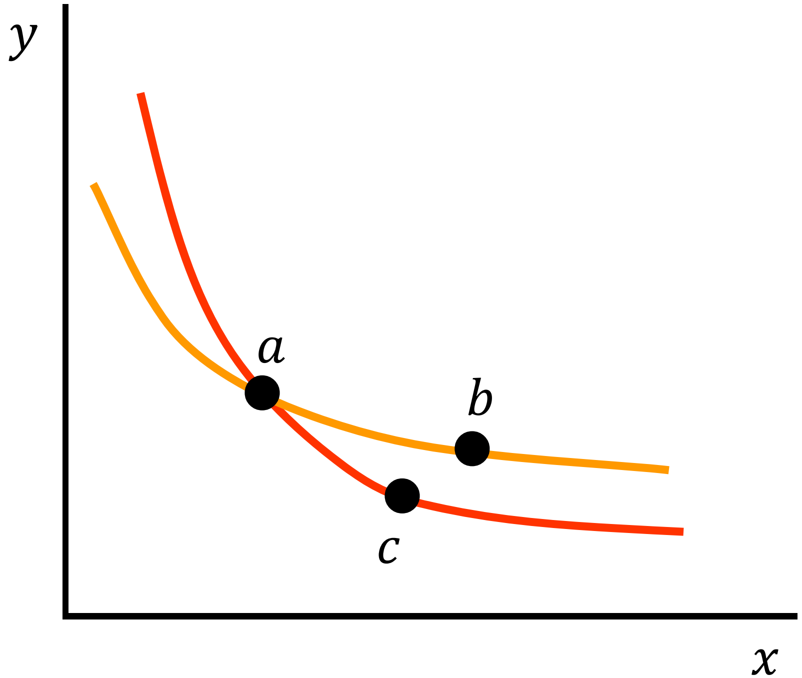
Kayıtsızlık eğrisi üzerinde toplam fayda düzeyi değişmeyeceğinden, $dU = 0$ olur.

$$dU = U_y dy + U_x dx = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{U_x}{U_y} = -\frac{dy}{dx} = MRS_{xy}}$$

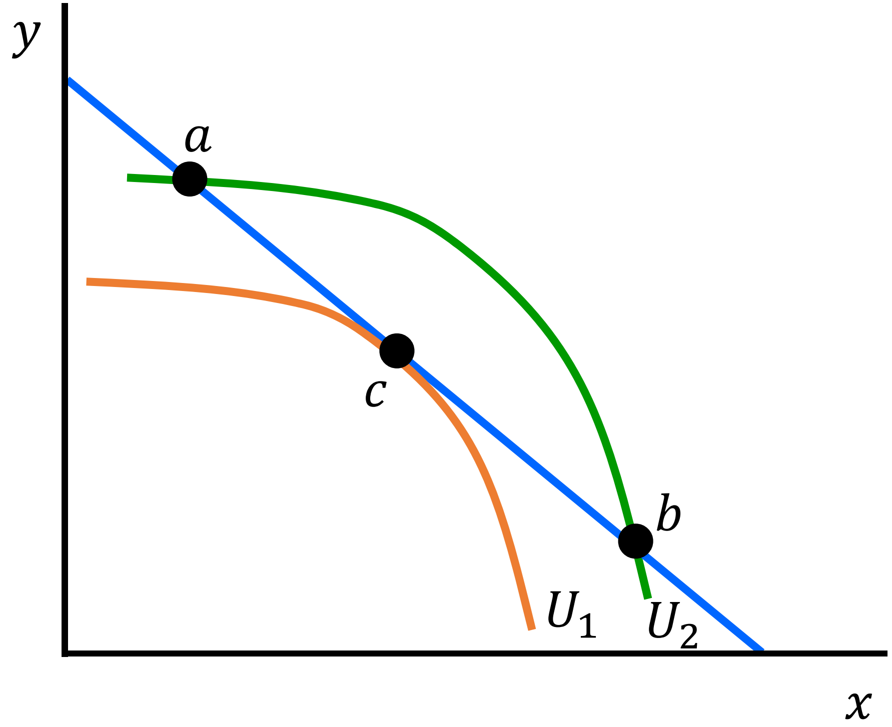
Kayıtsızlık eğrilerinin özellikleri şöyledir :

1. Kayıtsızlık eğrileri negatif eğime sahiptir.
2. Orijinden uzaklaştıkça, kayıtsızlık eğrileri daha yüksek fayda düzeylerini gösterir.
3. Kayıtsızlık eğrileri birbirlerini kesmezler.
4. Kayıtsızlık eğrileri orijine göre dışbükeydirler.

Şekil 4. Kayıtsızlık Eğrilerinin Özellikleri

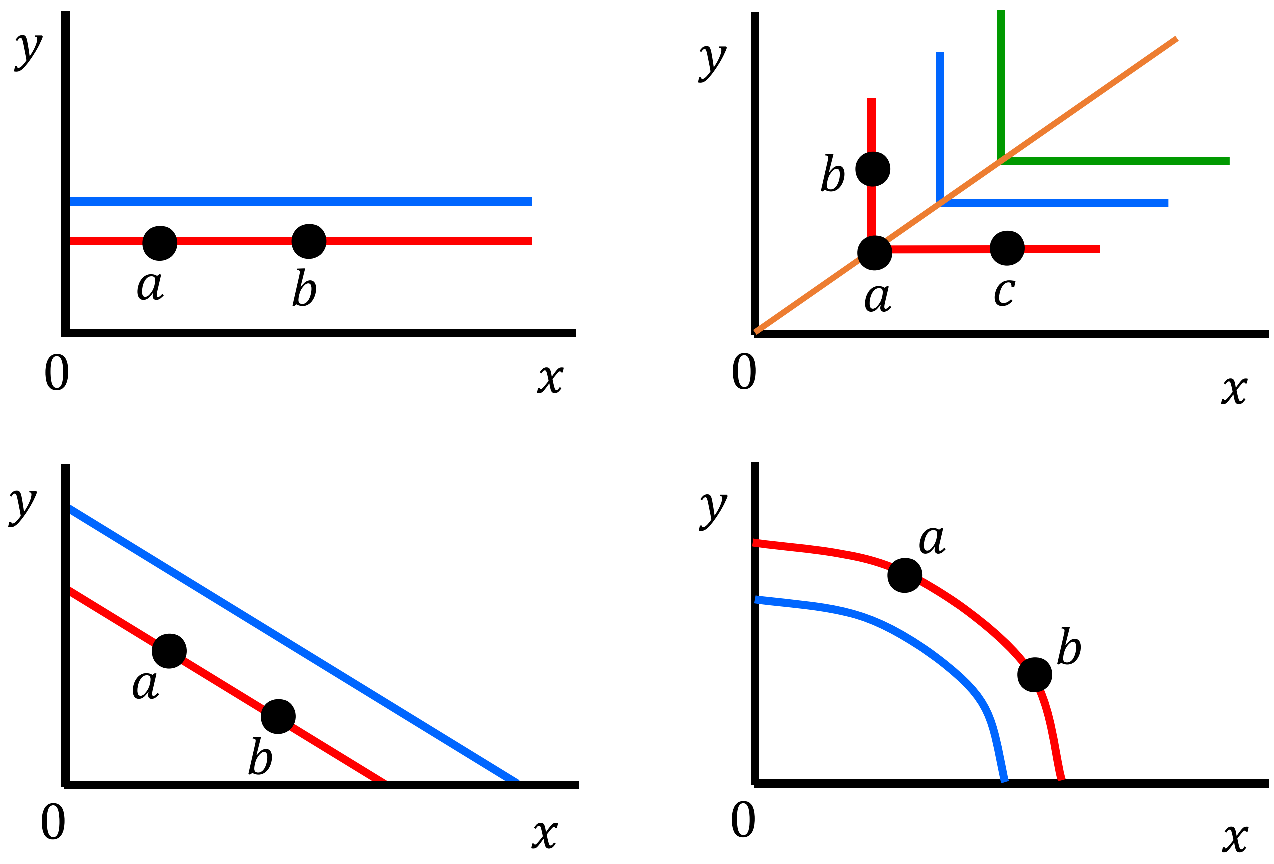


Kayıtsızlık eğrileri kesişmezler.



Kayıtsızlık eğrileri içbükey değildirler.

Şekil 5. Kayıtsızlık Eğrileri



Tüketici faydasını maksimize ederken kısıtlı bir gelir altında mal seçimi yapmaktadır. Örneğin bireyin tüm gelirini yalnızca x ve y mallarına harcadığını varsayalım. Buna göre bütçe kısıtı :

$$M = xP_x + yP_y$$

Buradan hareketle bütçe doğrusunu bulalım:

$$y = \frac{1}{P_y}M - \frac{P_x}{P_y}x$$

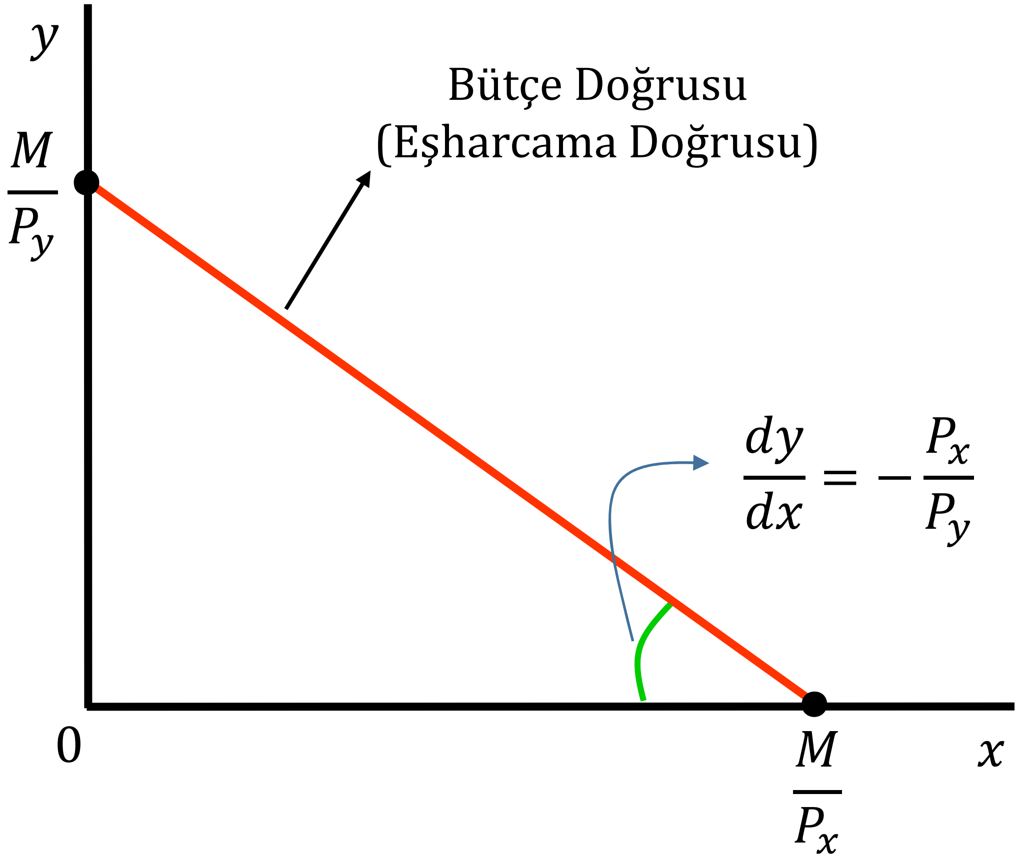
Birey tüm gelirini (M) y malına harcarsa $y = M/P_y$ kadar; x malına harcarsa $x = M/P_x$ kadar mal satın alır.

Buna göre bütçe doğrusunun eğimini iki şekilde belirleyebiliriz. Birincisi, yukarıda yazdığımız bütçe doğrusu denkleminin x'e göre türevini alırız :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P_x}{P_y} \longrightarrow \text{Bütçe doğrusunun eğimi}$$

İkinci yönteme göre, tüm gelirini yalnızca her bir mala harcadığında satın alabileceği x ve y malı miktarlarını yatay ve dikey eksenlere eşitler, iki noktadan bütçe doğrusunu elde ederiz. Bunu Şekil 6'da görebiliriz.

Şekil 6. Bütçe Doğrusu



Tüketici, geliri ve malların fiyatları veriyken, elde edebileceği faydayı maksimize ettiğinde dengeye ulaşır. Tüketicinin dengede olabilmesi için iki koşul sağlanmalıdır:

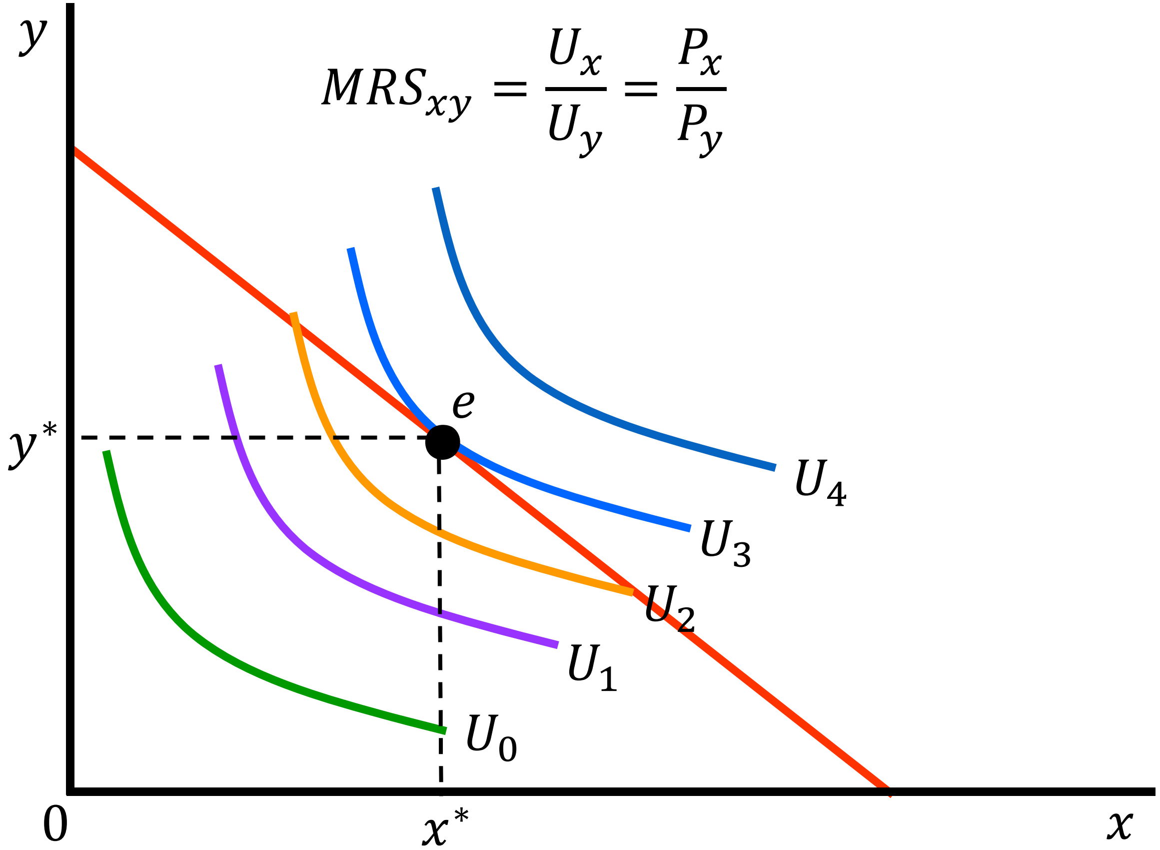
- Birinci koşul marjinal ikame oranının, mal fiyatları oranına eşit olmasıdır:

$$MRS_{xy} = \frac{U_x}{U_y} = \frac{P_x}{P_y}$$

Bu koşul denge için gerekli, fakat yeterli değildir.

- İkinci koşul, kayıtsızlık eğrilerinin orijine göre dışbükey olmasını gerektirir. Bu iki koşulu birden sağlayan kayıtsızlık eğrileri Şekil 7'de çizilmiştir.

Şekil 7. Tüketici Dengesi



Piyasa fiyatları ve gelir düzeyi verildiğinde, tüketici elde edeceği faydayı maksimize etmeyi amaçlamaktadır. Tüketicinin kullanabileceği $P_1, P_2, \ldots, P_n$ fiyatlarına sahip n tane mal ve M birim gelire sahip olduğunu varsayalım. Buna göre, amaç fonksiyonu (fayda fonksiyonu) ve kısıt fonksiyonu (bütçe kısıtı) şöyledir :

Amaç Fonksiyonu : $U = f(q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots\ldots, q_n)$

Kısıt Fonksiyonu : $\sum_{i=1}^{n} P_i q_i = P_1 q_1 + P_2 q_2 + \ldots\ldots\ldots + P_n q_n = M$

Bu kısıtlamalı maksimizasyonun çözümünde *Lagrange Çarpanı* yöntemi kullanılmaktadır. Bunun için önce Lagrange fonksiyonunu oluşturalım:

$$Z = U(q_1, \ldots, q_n) + \lambda[M - (P_1 q_1 + P_2 q_2 + \ldots\ldots\ldots + P_n q_n)]$$

Bu bileşik fonksiyonun maksimize edilmesi, U fayda fonksiyonunun maksimize edilmesi ile aynıdır. Dolayısıyla Z fonksiyonunun maksimize edilmesi için gereken birinci sıra koşulları sağlayalım.

Birinci sıra koşullar :

$$\frac{\partial Z}{\partial q_1} = \frac{\partial U}{\partial q_1} - \lambda P_1 = 0, \ldots\ldots\ldots, \frac{\partial Z}{\partial q_n} = \frac{\partial U}{\partial q_n} - \lambda P_n = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = M - (P_1 q_1 + P_2 q_2 + \ldots\ldots\ldots + P_n q_n) = 0$$

Bu denklemler yeniden düzenlenirse;

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = \lambda P_1 \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = \lambda P_2 \ , \ldots\ldots\ldots , \quad \frac{\partial U}{\partial q_n} = \lambda P_n$$

Tüm λ'ları eşitlersek;

$$\lambda = \frac{\partial U / \partial q_1}{P_1} = \frac{\partial U / \partial q_2}{P_2} = \ldots\ldots\ldots = \frac{\partial U / \partial q_n}{P_n}$$

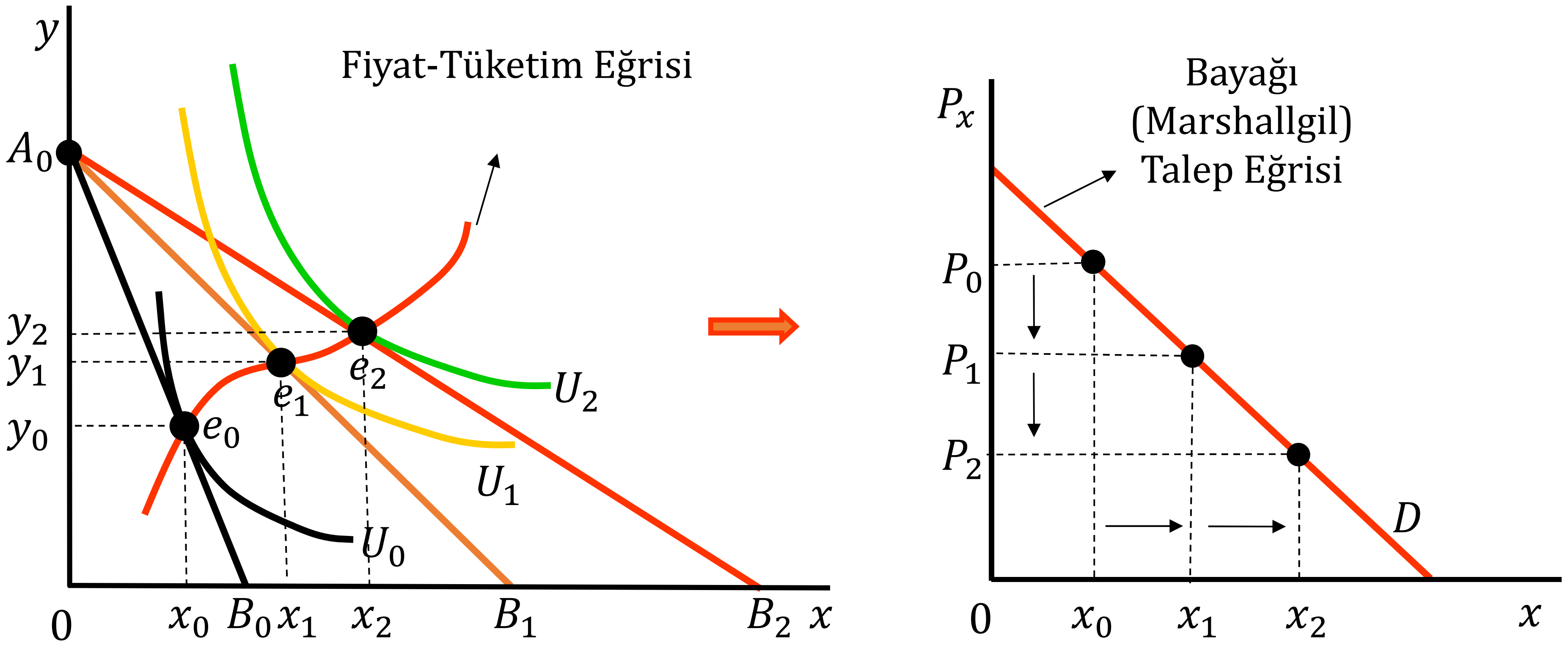
$$\boxed{\frac{U_1}{P_1} = \frac{U_2}{P_2} = \ldots\ldots\ldots = \frac{U_n}{P_n}} \longrightarrow \text{Tüketici Denge Koşulu}$$

Şimdi bireyin iki mal (x, y) tükettiğini varsayalım. Örneğin x ekmek tüketimini, y de ekmek dışında kalan diğer tüketim tercihlerini gösterebilir. Belirli bir malın, örneğin x malının fiyatı düştükçe, tüketicinin elinde bulunan parasal gelirin satın alma gücü artacağından, bütçe doğrusu sağa doğru kayar. Şekil 8'e göre, A_0B_0'dan A_0B_1'e doğru hareket eder.

Bütçe doğrusunun A_0B_0'dan A_0B_1'e doğru hareketi sonrasında tüketicinin satın alma gücü yükselir, x ile y malından daha fazla alabilme olanağına kavuşur. A_0B_1 bütçe doğrusu, daha yüksekte yer alan U_1 fayda düzeyine (kayıtsızlık eğrisine) teğet olur (e_1 noktası).

x malının fiyatı düştükçe yeni denge noktaları, x malından satın alınan miktarın arttığını gösterecek şekilde eski denge noktalarının sağında yer almaktadır. Bu durum *normal mallar* için geçerlidir (Şekil 8).

Şekil 8. Fiyat-Tüketim Eğrisi



P_x sürekli biçimde azalacak olursa, A_0B_0 bütçe doğrusu da eğimi azalacak şekilde sağa kaymayı sürdürür. Bu şekilde çok sayıda yeni denge noktası oluşur (e_0, e_1, e_2,...). Bu şekilde oluşan her bir yeni denge noktasının oluşturduğu eğriye, *Fiyat-Tüketim Eğrisi* adını veriyoruz.

Fiyat-tüketim eğrisi, *x* malının fiyatındaki değişmeler karşısında, *x* malının talep edilen miktarındaki değişmeleri gösterir.

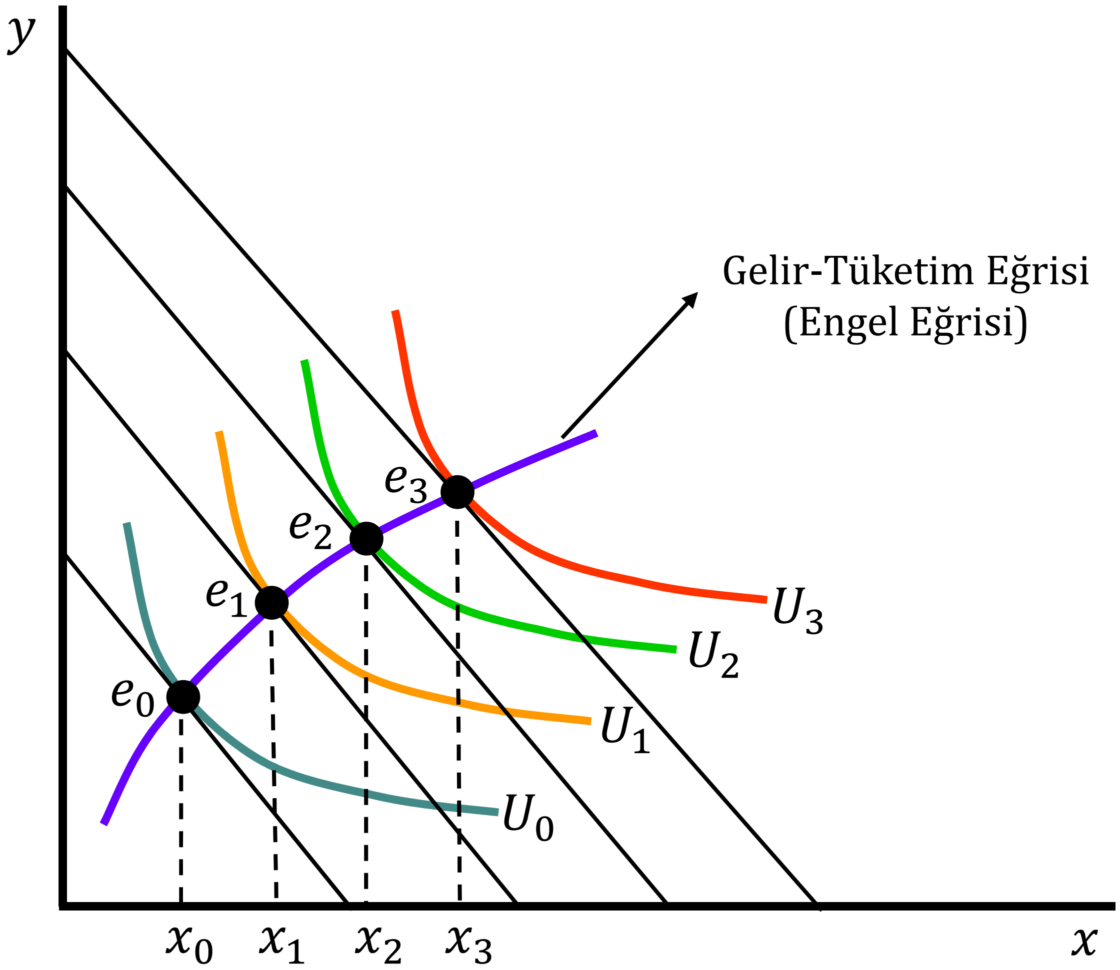
x malı için talep eğrisi, fiyat-tüketim eğrisi kullanılarak belirlenebilir. Eğer *x* normal bir mal ise, *x*'in fiyatındaki azalmalar, *x*'in talep edilen miktarını artıracaktır. Bu durumda *talep yasası* geçerli olmaktadır. Kayıtsızlık eğrileri yaklaşımı altında talep yasasına, fiyat değişimlerinden kaynaklanan ikame etkisinin daima negatif olduğunu belirten *Slutsky Teoremi*nden ulaşılmak-tadır.

Gelirdeki değişimler, bireyin bütçe doğrusunu (ya da bir başka ifadeyle tüketim olanakları doğrusunu) paralel bir şekilde aşağı ve yukarı yönde kaydırmaktadır. Gelir arttığında, tüketicinin satın alma gücünü ifade eden bütçe doğrusu yukarı kaymakta, gelir azaldığında ise orijine yaklaşmaktadır. Her iki durumda da yeni tüketici dengesi, bütçe doğrusunun yeni kayıtsızlık eğrisine teğet olduğu noktada oluşacaktır.

Şekil 9'da bütçe doğrusu sürekli sağ-üste doğru kaymıştır. Bunun nedeni, fiyatlar (P_x ve P_y) sabitken, bireyin nominal gelirinin artmasıdır. Yeni denge noktalarının (e_1, e_2, e_3) birleştirilmesiyle oluşan eğriye *gelir-tüketim eğrisi* (ya da yaşam düzeyi eğrisi, Engel eğrisi) denilmektedir. *x* ve *y* mallarının fiyatları sabit tutulduğundan, bütçe doğrusunun eğimini gösteren P_x/P_y değişmemektedir.

Gelir-tüketim eğrisi, nominal gelir artışları karşısında tüketicinin *x* ve *y* malı taleplerini nasıl değiştirdiği konusunda bilgi vermektedir.

Şekil 9. Gelir-Tüketim Eğrisi



19. yüzyılda Ernst Engel tarafından geliştirilen gözlem, Engel yasası olarak literatüre girmiştir. Bu yasaya göre;

- Düşük gelirli ailelerden yüksek gelirli ailelere gidildikçe gıda ve barınma harcamaları mutlak olarak artmakta, göreli olarak azalmaktadır. Bu tür malların gelir-talep esnekliği 1'den küçüktür.

- Düşük gelirli ailelerden yüksek gelirli ailelere gidildikçe giyim ve konut harcamaları (aydınlatma, ısınma) mutlak olarak artmakta, göreli olarak sabit kalmaktadır. Bu tür malların gelir-talep esnekliği 1'e eşittir.

- Düşük gelirli ailelerden yüksek gelirli ailelere gidildikçe eğitim, sağlık ve eğlence-kültür harcamaları mutlak hem de göreli olarak artmaktadır. Bu tür malların gelir-talep esnekliği 1'den büyüktür.

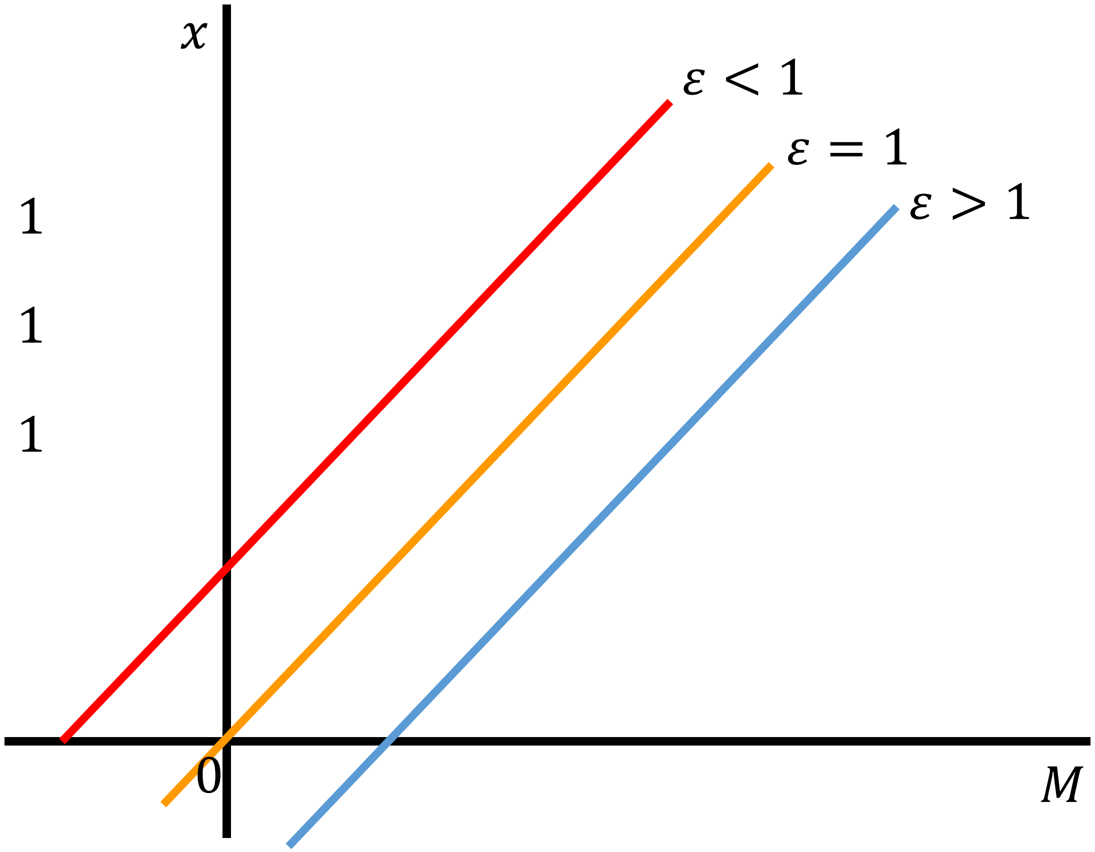
Şekil 10. Gelir-Talep Esnekliği ve Engel Yasası

$$\varepsilon = \frac{\partial x}{\partial M}\frac{M}{x}$$

$M > x \rightarrow \varepsilon > 1$

$M = x \rightarrow \varepsilon = 1$

$M < x \rightarrow \varepsilon < 1$



Marshallgil (Bayağı) Talep Fonksiyonu

Marshallgil (bayağı talep fonksiyonları, bireyin bütçe kısıtı altında toplam faydasının maksimize edilmesi yoluyla belirlenir. Bu amaçla, kısıt altında optimizasyon (maksimizasyon ya da minimizasyon) Lagrange fonksiyonu yaklaşımıyla çözülebilir. İlk olarak bireyin amaç fonksiyonu (toplam fayda fonksiyonu) ve kısıt fonksiyonunu (bireyin parasal gelirinin tamamını harcaması), ardından bu fonksiyonlara bağlı olarak Lagrange fonksiyonunu tanımlayalım.

$$\underset{\max}{U} = U(x, y) \ , \ x, y \geq 0$$

$$M = xP_x + yP_y$$

$$Z = \underset{\max}{U(x, y)} + \lambda\left(M - xP_x - yP_y\right)$$

Lagrange fonksiyonunun birinci ve ikinci sıra koşulları sağlanarak yapılan çözümü, optimal x ve y satın alma miktarlarını (ya da x ve y mallarının Marshallgil talep fonksiyonlarını) verecektir. Elde edilecek optimal x ve y satın alma miktarları aynı anda iki işlevi yerine getirecektir. Birincisi bireyin tüm gelirini harcamasını; ikincisi toplam faydanın maksimize edilmesini sağlayacaktır. Birinci sıra koşullar şöyledir:

$$Z = U(x, y) + \lambda\left(M - xP_x - yP_y\right)$$

$$\left.\begin{aligned} Z_x &= U_x(x, y) - \lambda P_x = 0 \\ Z_y &= U_y(x, y) - \lambda P_y = 0 \end{aligned}\right\} \quad \boxed{MRS_{xy} = \frac{U_x}{U_y} = \frac{P_x}{P_y}} \longrightarrow \text{Tüketici denge koşulu}$$

$$Z_\lambda = M - xP_x - yP_y = 0$$

Problemin ikinci sıra koşulu da şöyledir:

$$\overline{H} = \begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} & Z_{x\lambda} \\ Z_{yx} & Z_{yy} & Z_{y\lambda} \\ Z_{\lambda x} & Z_{\lambda y} & Z_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{xx} & U_{xy} & -P_x \\ U_{yx} & U_{yy} & -P_y \\ -P_x & -P_y & 0 \end{bmatrix} > 0$$

$$\overline{H} = -U_{xx}P_y^2 + U_{xy}P_xP_y - U_{yy}P_x^2 > 0$$

$$- \quad + \qquad\quad + \;\; + \, + \qquad\quad - \quad +$$

Şimdi bu uygulamayı Cobb-Douglas fayda fonksiyonunu dikkate alarak yapalım ve x malının Marshallgil talep fonksiyonunu belirleyelim.

$$\underset{\max}{U} = U(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta} \ , \ x, y \geq 0 \ , \qquad 0 < \alpha, \beta < 1$$

$$M = xP_x + yP_y$$

$$\underset{\max}{Z} = x^{\alpha} y^{\beta} + \lambda\left(M - xP_x - yP_y\right)$$

$$\left.\begin{aligned} Z_x &= \alpha x^{\alpha-1} y^{\beta} - \lambda P_x = 0 \\ Z_x &= \beta x^{\alpha} y^{\beta-1} - \lambda P_y = 0 \end{aligned}\right\} \quad \lambda = \frac{\alpha x^{\alpha-1} y^{\beta}}{P_x} = \frac{\beta x^{\alpha} y^{\beta-1}}{P_y} \quad \rightarrow \quad y = \frac{\beta}{\alpha} \frac{P_x}{P_y} x$$

$$Z_{\lambda} = M - xP_x - yP_y = 0$$

$$x = \left[\frac{M}{(1 + (\beta/\alpha))}\right] P_x^{-1} \quad \longrightarrow$$

x malının Marshallgil (bayağı) talep fonksiyonu.

y malı talep fonksiyonunu bulmak için de, x malı talep fonksiyonunu, birinci sıra koşulun ara çözümündeki yerine yazarak ve yeniden düzenleyerek, y malının Marshallgil talep fonksiyonuna ulaşmış oluruz.

$$y = \frac{\beta}{\alpha}\frac{P_x}{P_y}x \longleftarrow \boxed{x = \left[\frac{M}{(1+(\beta/\alpha))}\right]P_x^{-1}}$$

$$y = \left[\frac{M}{(1+(\alpha/\beta))}\right]P_y^{-1} \longrightarrow$$

y malının Marshallgil (bayağı) talep fonksiyonu.

Cobb-Douglas toplam fayda fonksiyonunda yer alan α ve β parametreleri bireyin sırasıyla x ve y mallarına toplam sepeti içinde verdiği önemi (sıralamayı) göstermek-tedir. α/β oranın artması, x'in marjinal faydasının, y'nin marjinal faydasına göre $(MRS_{xy} = (U_x/U_y))$ yükseldiğini ifade etmektedir.

Lagrange probleminde yer alan üçüncü bilinmeyenimiz Lagrange çarpanıdır (λ). λ, bireyin parasal gelirinin marjinal faydasını ifade etmektedir. Yani bireyin parasal geliri arttığında, toplam faydasının (refah düzeyinin) ne ölçüde artacağını söylemektedir. Bunu görebilmek için birinci sıra koşula ve bütçe denklemine yeniden başvuralım.

$$Z_x = U_x(x,y) - \lambda P_x = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{U_x(x,y)}{P_x}$$

$$M = xP_x + yP_y \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial x} = P_x$$

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} \equiv U_x(x,y) = \frac{\partial U}{\partial M}\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial M}P_x \quad \rightarrow \frac{\partial U}{\partial M} = \frac{U_x(x,y)}{P_x} = \lambda$$

Problemin ikinci sıra koşulu da şöyledir:

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} & Z_{x\lambda} \\ Z_{yx} & Z_{yy} & Z_{y\lambda} \\ Z_{\lambda x} & Z_{\lambda y} & Z_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{xx} & U_{xy} & -P_x \\ U_{yx} & U_{yy} & -P_y \\ -P_x & -P_y & 0 \end{bmatrix} > 0$$

$$U_{xx} = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}y^{\beta}\ , U_{yy} = \beta(\beta - 1)x^{\alpha}y^{\beta-2}\ \ , U_{xy} = U_{xy} = \alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1}$$

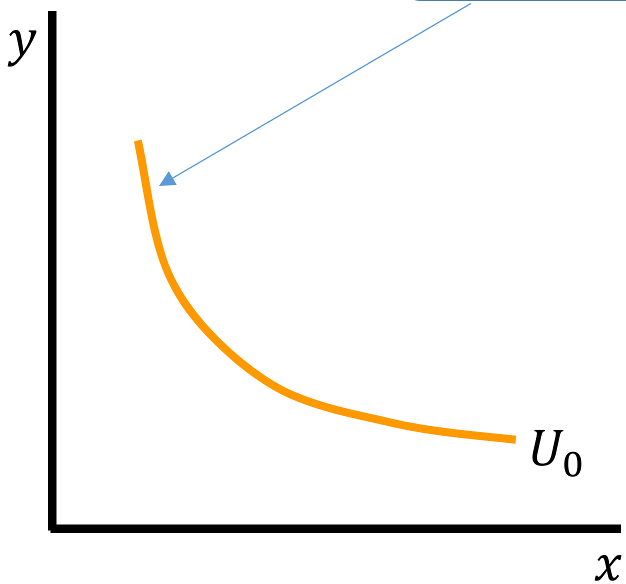
$$\bar{H} = -U_{xx}P_y^2 + U_{xy}P_xP_y - U_{yy}P_x^2 > 0$$

$$\bar{H} = -\alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}y^{\beta}P_y^2 + \alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1}P_xP_y - \beta(\beta - 1)x^{\alpha}y^{\beta-2}P_x^2 > 0$$

$$\underbrace{+\quad -\quad +\quad +\ +}_{+}\quad \underbrace{+++\quad +\quad +\,+}_{+}\quad \underbrace{+\quad -\quad +\quad +\ +}_{+}$$

Bireyin x ve y malları seçimini gösteren kayıtsızlık eğrisini, toplam fayda fonksiyonundan hareketle türetiriz. Toplam fayda fonksiyonunda, belirli bir toplam fayda (refah) düzeyi (örneğin U_0) için y'i eşitliğin bir yanında bırakarak, y ile x arasında tanımlayacağımız fonksiyon, kayıtsızlık eğrisinin denklemini gösterecektir. Kayıtsızlık eğrisi denkleminin ikizkenar hiperbolik olduğuna ve üzerindeki tüm noktalarda x ve y arasındaki ikame esnekliğinin sabit $(-(\alpha/\beta))$ olduğuna dikkat edelim.

$$U_0 = x^{\alpha} y^{\beta} \quad \rightarrow \quad \boxed{y = U_0^{1/\beta} x^{-\alpha/\beta}}$$



$$lny = (1/\beta)lnU_0 - (\alpha/\beta)lnx$$

$$\frac{\partial lny}{\partial lnx} = -\frac{\alpha}{\beta}$$

$$\frac{\partial y/y}{\partial x/x} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{x}{y} \quad \rightarrow \quad MRS_{xy} = -\frac{\alpha}{\beta}\frac{x}{y}$$

Cobb-Douglas fayda fonksiyonu parametrelerini, fiyatları ve geliri sayısal olarak tanımlarsak, ilgili değerler karşısındaki x ve y mallarının sayısal çözümlerini elde ederiz. Aşağıdaki değerleri dikkate alalım:

$$\alpha = 0{,}5, \beta = 0{,}5, P_x = 10, P_y = 8, M = 1000$$

$$\underset{\max}{U} = U(x, y) = x^{0,5} y^{0,5} \ , \ x, y \geq 0$$

$$M = 10x + 8y$$

$$Z = \underset{\max}{x^{0,5} y^{0,5}} + \lambda(1000 - 10x + 8y\ )$$

Bu Lagrange probleminin çözümü bize bireyin, bu veri koşullar altındaki optimal mal sepeti seçimini (x_0, y_0) verecektir. Bu problemi yukarıda simgesel olarak çözmüş ve x malının Marshallgil (bayağı) talep fonksiyonunu elde etmiştik. Bu nedenle problemi yeniden çözmek yerine, ilgili değerleri talep fonksiyonundaki yerine yazarak, optimal x malı talep miktarını (x_0) bulabiliriz. Benzer biçimde aynı işlemi y malı talep miktarı için de yaparız.

x ve y mallarının talep fonksiyonları sırasıyla şöyleydi:

$$x = \left[\frac{M}{(1 + (\beta/\alpha))}\right] P_x^{-1}\,, \qquad y = \left[\frac{M}{(1 + (\alpha/\beta))}\right] P_y^{-1}$$

$$x = \left[\frac{1000}{(1 + (0{,}5/0{,}5))}\right] 10^{-1}\,, \qquad y = \left[\frac{1000}{(1 + (0{,}5/0{,}5))}\right] 8^{-1}$$

$$x_0 = 50\,, y_0 = 62{,}5\,, \lambda = 0{,}056$$

Bireyin toplam fayda (refah) düzeyi fonksiyonunu (dolaylı fayda fonksiyonu) ve bu tüketim düzeylerine karşılık gelen sayısal indeks düzeyini belirleyelim:

$$U = x^{\alpha} y^{\beta} = \left[\frac{M}{(1 + (\beta/\alpha))P_x}\right]^{\alpha} \left[\frac{M}{(1 + (\beta/\alpha))P_y}\right]^{\beta} = \underbrace{\frac{M^{\alpha+\beta}}{(1 + (\beta/\alpha))^{\alpha+\beta} P_x^{\alpha} P_y^{\beta}}}_{\text{Dolaylı Fayda Fonksiyonu}}$$

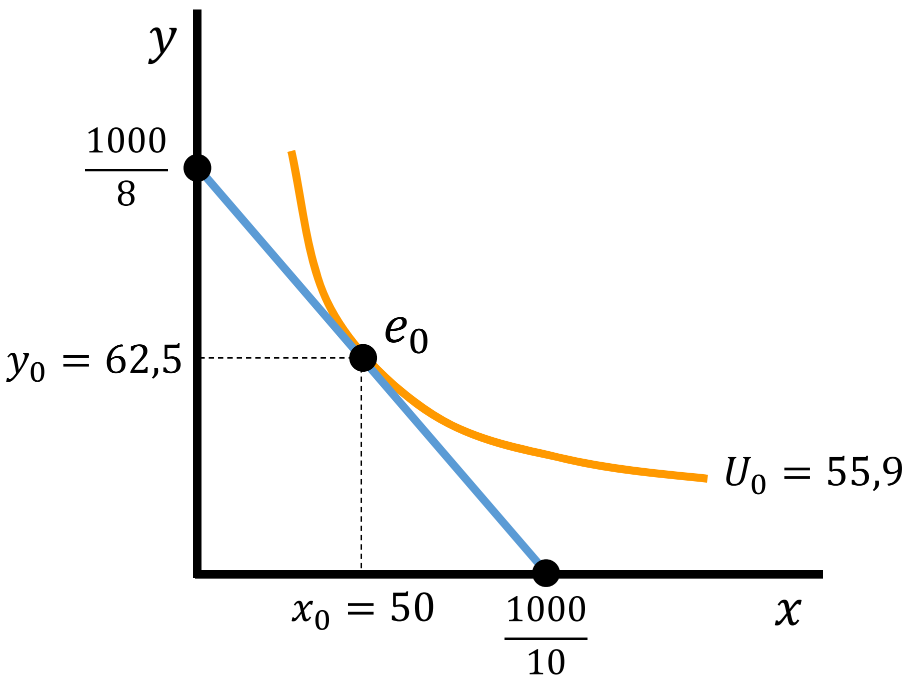
$$U = U(x, y) = x^{0{,}5} y^{0{,}5}$$

$$U_0 = U(x_0, y_0) = (50)^{0{,}5} (62{,}5)^{0{,}5} = 55{,}9$$

Bu problem için bireyin kayıtsızlık eğrisinin denklemi:

$$U_0 = 55{,}9 = x^{0{,}5}y^{0{,}5} \quad \rightarrow \quad y = 3124{,}8x^{-1}$$

x ve y mallarının optimal seçimini, kayıtsızlık eğrisi ve bütçe dorusunun (eş-harcama doğrusu) birlikte yer aldığı aşağıdaki şekilde görebiliriz.



İkame ve Gelir Etkileri

Bireyin satın aldığı mallardan birinin, örneğin x malının fiyatı (P_x) düştüğünde, x malından satın alınan miktar, x malının özelliğine (normal, bayağı, Giffen) bağlı olarak değişim gösterir (artabilir, azalabilir, sabit kalabilir). Bunun iki nedeni vardır:

1. İkame Etkisi (Hicksgil etki ya da net ikame etkisi)

2. Gelir Etkisi

İkame ve gelir etkilerine iki yaklaşım vardır. Birinci yaklaşım 1915 yılında Eugen Slutsky tarafından; ikinci yaklaşım da 1934'te John Hicks ve R.G.D. Allen, 1939'da John Hicks tarafından geliştirilmiştir. Her iki yaklaşım arasındaki farklar küçüktür.

İlk olarak Slutsky'nin yaklaşımını, ardından Hicks tarafından önerilen yaklaşımı ele alarak, değişik durumlarda ikame ve gelir etkilerinin yol açtığı sonuçları görelim.

Slutsky Yaklaşımı ve Denklemi

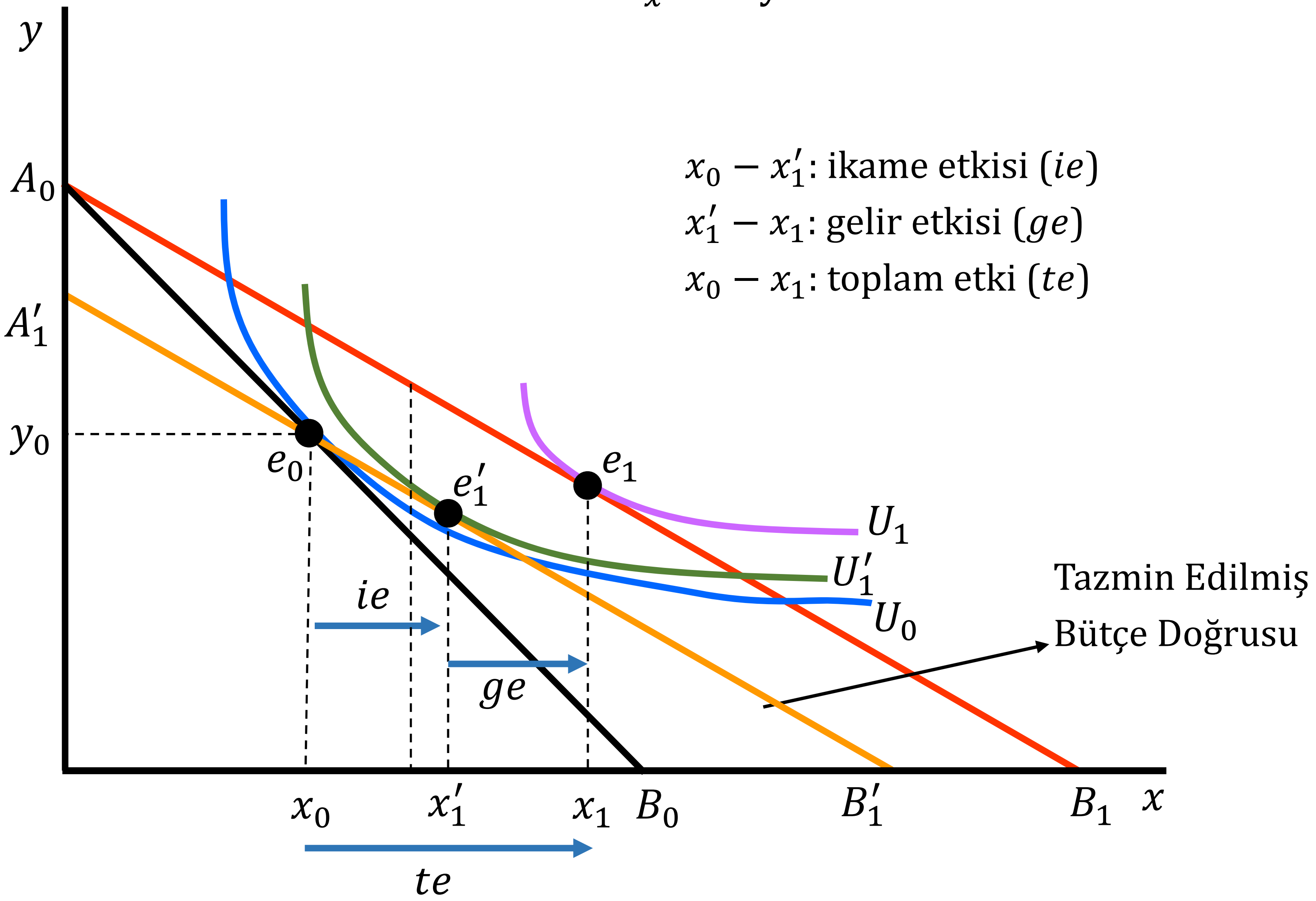
Slutsky’nin yaklaşımı, satın alınan mallardan birinin (örneğin x malının) fiyatı değiştiğinde, bireyin toplam harcamasını sabit tutarak, fiyat değişiminin neden olduğu x malı satın alma miktarındaki değişimi, ikame ve gelir etkilerine ayrıştırmaya çalışır. Bu etkileri, sırasıyla normal, bayağı ve aşırı bayağı (Giffen) malları durumları için Şekil 11, 12 ve 13’de görelim.

İlk olarak Şekil 11’de normal bir mal için ikame ve gelir etkileri gösterilmiştir. Şekildeki örneğe göre, x malının fiyatı düşmüştür. Slutsky yaklaşımını kullandığımızda, bireyin başlangıçta sahip olduğu harcama düzeyini (A_0B_0 doğrusu), fiyat değişiminden sonra sabit tutacak şekilde hareket edeceğiz. x malının fiyatı (P_x) düştüğünde, bireyin reel geliri (satın alma gücü, reel harcama gücü) artmış olacaktır. Ancak bu artışın gerçek değerini belirlemek için, fiyat düşüşün neden olduğu ikame ve gelir etkilerini belirlememiz gerekir. Slutsky yaklaşımı bunun için A_0B_1 doğrusu yerine, toplam harcamayı yeni göreli fiyatlar altında sabit tutacak şekilde A_0B_1' doğrusunu dikkate almaktadır.

Şekil 11. Gelir ve İkame Etkileri: Slutsky Yaklaşımı

Normal Mal

P_x azalıyor



A_0B_1' doğrusunun eğimi $-P_{x_1}/P_{y_0}$'dır. Başlangıçtaki eş-harcama doğrusunun (A_0B_0) eğimi ise $-P_{x_0}/P_{y_0}$'dır. Toplam harcamayı sabit tutabilmek için, A_0B_1' doğrusunun e_0 noktasından geçtiğine dikkat edelim. Ancak bu doğru, P_x düştüğünden dolayı, daha yüksek bir harcama gücünü temsil edeceğinden, başlangıca göre (U_0) daha yüksek bir toplam fayda düzeyine (U_1') karşılık gelecektir. Birey, azalan P_x sonrasında, x ve y mallarının özelliklerine bağlı olarak yeniden rasyonel (optimal) seçimlerini belirlemiştir: x_1', y_1'. Bu seçim miktarı, x malının özelliğine (normal, bayağı, aşırı bayağı) bağlı olarak, Marshallgil talep denklemince tahmin edilmiş olan miktara eşit ya da küçük olabilir. Slutsky denklemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Denklemin türetilmesi ilerleyen sayfalarda yer almaktadır).

$$\underbrace{\frac{dx^M}{dP_x}}_{te} = \underbrace{\frac{dx^H}{dP_x}}_{\text{net } ie} \underbrace{- x^M \frac{dx^M}{dM}}_{ge}$$

x malının özelliği ne olursa olsun, P_x değiştiğinde, net *ie* (ya da Hicksgil *ie*) her zaman için negatif değere sahiptir. Diğer bir ifadeyle Hicksgil talep eğrisi her zaman için negatif eğimlidir.

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ normal mal} \\ x \text{ bayağı mal} \\ x \text{ Giffen malı} \end{array}\right\} \quad \frac{dx^H}{dP_x} < 0$$

ge'nin, dolayısıyla da *te*'nin (brüt *ie* ya da Marshallgil *ie*) işareti ise, x malının özelliğine bağlıdır.

x normal mal $\qquad \dfrac{dx^M}{dM} > 0$

x bayağı mal $\qquad \dfrac{dx^M}{dM} < 0$

x Giffen malı $\qquad \dfrac{dx^M}{dM} < 0$

x normal mal:

$$\frac{dx^M}{dP_x} = \frac{dx^H}{dP_x} - x^M \frac{dx^M}{dM}$$

$$- \qquad - \qquad + \quad +$$

x bayağı mal:

$$\frac{dx^M}{dP_x} = \frac{dx^H}{dP_x} - x^M \frac{dx^M}{dM}$$

$$- \qquad - \qquad + \quad -$$

x Giffen malı

$$\frac{dx^M}{dP_x} = \frac{dx^H}{dP_x} - x^M \frac{dx^M}{dM}$$

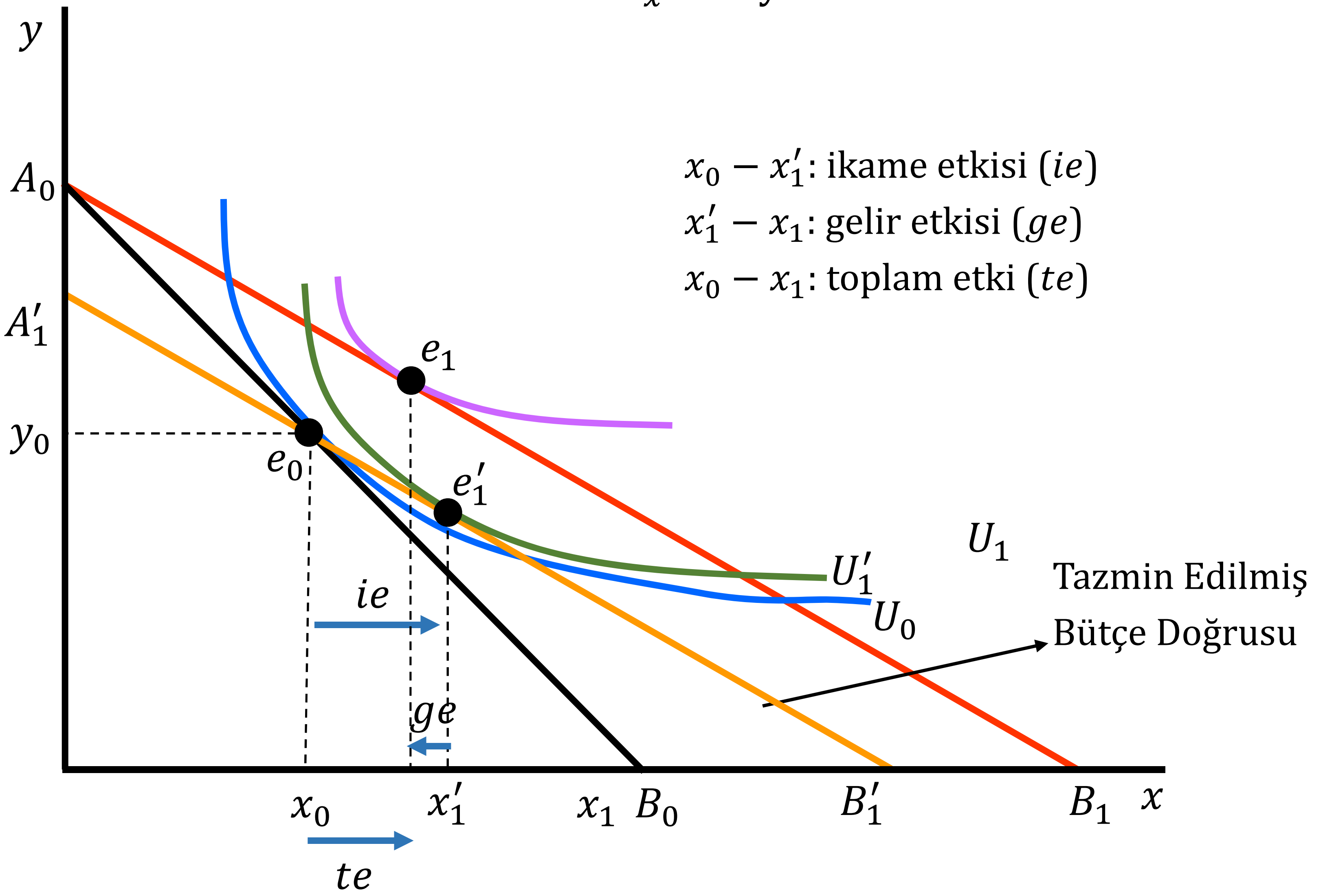
$$- \qquad - \qquad + \quad - \quad \longrightarrow \quad \frac{dx^H}{dP_x} > x^M \frac{dx^M}{dM}$$ ya da $ie > ge$

$$+ \qquad - \qquad + \quad - \quad \longrightarrow \quad \frac{dx^H}{dP_x} < x^M \frac{dx^M}{dM}$$ ya da $ie < ge$

Şekil 12. Gelir ve İkame Etkileri: Slutsky Yaklaşımı

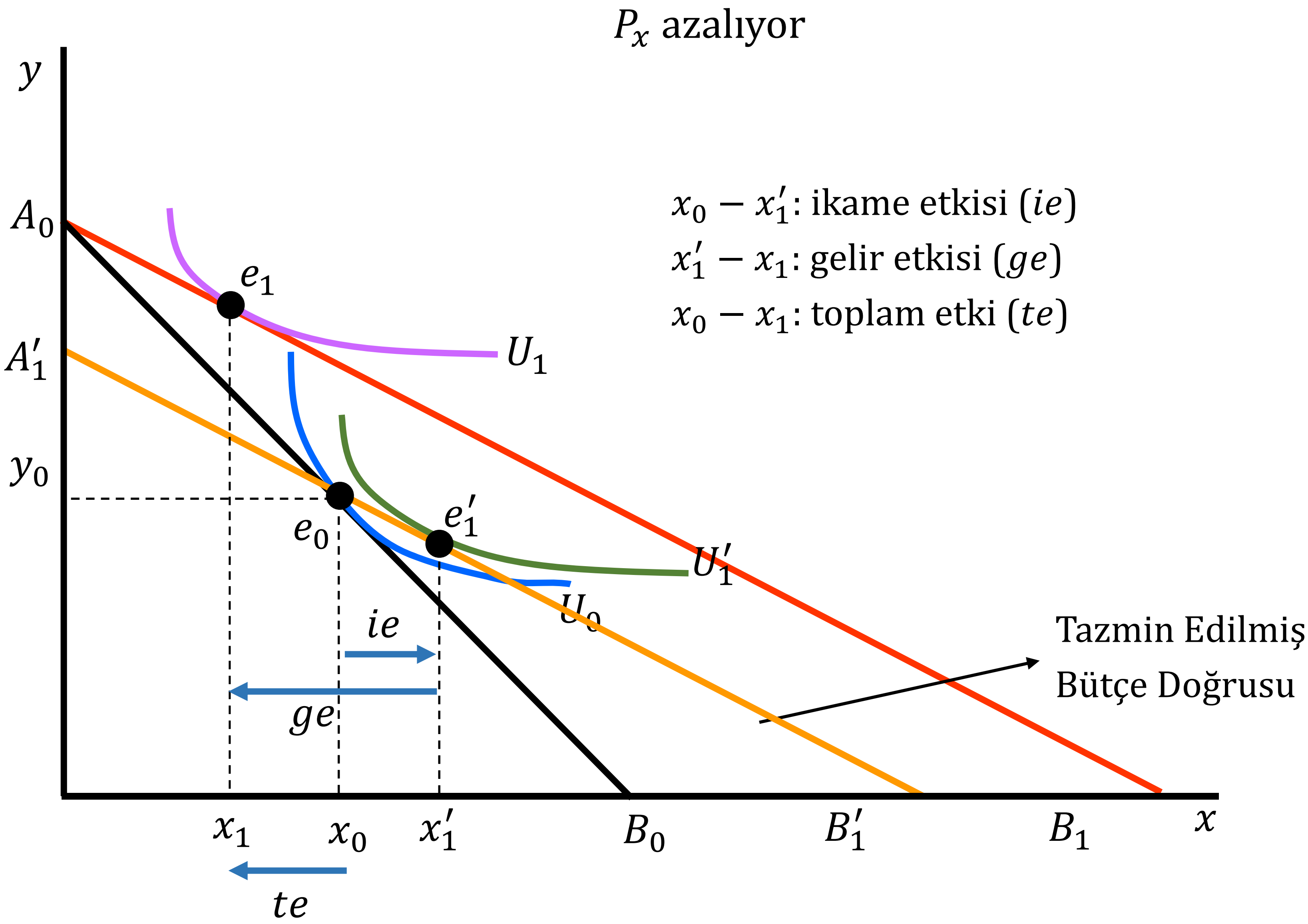
Bayağı Mal

P_x azalıyor



Şekil 13. Gelir ve İkame Etkileri: Slutsky Yaklaşımı

Aşırı Bayağı Mal (Giffen Malı)



Şekil 11 ve 12'de x malı fiyatı azalırken, x malının talep edilen miktarı artmaktadır. Yani $te < 0$'dır. Bu durumda talep yasası geçerliliğini korumaktadır. Şekil 13'te ise x malının birey için aşırı bayağı özelliği kazanmaya başladığı bir durum çizilmiştir. P_x azalması karşısında harcama gücü yükselen birey, kendisi için aşırı sıradanlaşan x malından çok daha az almak istemektedir. Göreli olarak daha ucuzlayan x malından daha fazla alma isteğine (*ie*) karşın, gelir etkisi azalan yönde ve baskın çıkmaktadır. Bu nedenle, P_x azalması karşısında daha fazla x malı alması beklenen birey, daha az x almaya yönelmektedir. Yani *net ie* artan yönde çalışmakla birlikte, *toplam etki* (*brüt ie*) azalan yönde çalışmaktadır.

Grafik olarak incelediğimiz bu etkilere bir de sayısal olarak bakalım. Bireyin başlangıçta (fiyat değişiminden önce) şu fayda ve harcama fonksiyonlarına sahip olsun:

$$U = U(x, y)$$

$$M_0 = x_0 P_x + y_0 P_y$$

Başlangıçta M_0 kadar parasal gelire sahip olan birey, veri fayda fonksiyonu altında (x_0, y_0) optimal alımını yapmaktadır. x malı fiyatının P_{x_0}'dan P_{x_1}'e düştüğünü varsayalım. Bu durumda bireyin reel harcama gücü yükselecektir. Bireyin başlangıca göre harcama gücünün göre ne kadar arttığını belirleyelim.

$$M^H - M_0 = \left(x_0 P_{x_1} + y_0 P_{y_0}\right) - \left(x_0 P_{x_0} + y_0 P_{y_0}\right)$$

$$M^H - M_0 = x_0\left(P_{x_1} - P_{x_0}\right)$$

$$\Delta M = x_0 \Delta P_x$$

Bu değer, bireyin harcama gücündeki artışa karşılık gelmektedir. Bu nedenle, bireyin artan harcama gücünü ve yeni fiyatları dikkate alarak gerçekleştireceği optimal x malı satın alma miktarı artışı (*net ie*) ve *ge* sırasıyla şöyle olacaktır:

$$\Delta x^{ie} = x\left(P_{x_1}, M^H\right) - x\left(P_{x_0}, M_0\right) = x_1' - x_0$$

$$\Delta x^{ge} = x\left(P_{x_1}, M_0\right) - x\left(P_{x_1}, M^H\right) = x_1 - x_1'$$

net ie ve *ge*'yi bir örnek yardımıyla hesaplayalım. Bireyin talep fonksiyonu ve başlangıçtaki x malı fiyatı ve gelir düzeyi şöyle olsun.

$$x = \frac{M}{2P_x} \qquad P_{x_0} = 50\,, M_0 = 1000$$

Başlangıç fiyat ve gelir düzeyi dikkate alındığında, bireyin *x* malı (et) satın alma miktarı:

$$x_0 = \frac{M_0}{2P_{x_0}} = \frac{1000}{100} = 10 \text{ kg/ay}$$

Etin kg fiyatı 40 TL'ye düşsün ($P_{x_1} - P_{x_0} = \mathit{\Delta} P_x = -40$). Bu durumda bireyin *x* malı (et) satın alma miktarı:

$$x_1 = \frac{M_0}{2P_{x_1}} = \frac{1000}{80} = 12{,}5 \text{ kg/ay}$$

Bireyin x malı talep miktarındaki toplam değişim:

$$\mathit{\Delta} x = x_1 - x_0 = 12{,}5 - 10 = 2{,}5 \text{ kg/ay}$$

Bu fiyat değişiminin yol açtığı *net ie*'yi bulabilmek için önce bireyin harcama gücündeki artışı ($\Delta M = M^H - M_0$) hesaplayalım.

$$\Delta M = x_0 \Delta P_x \quad \rightarrow \quad \Delta M = (10)(-10) = -100$$

Fiyat değişimi sonrasında bireyin başlangıç sepetini alabilmesi için gereken gelir:

$$M^H = M_0 + \Delta M_0 = 1000 - 100 = 900$$

Yeni reel gelir ve fiyat düzeyinde gerçekleşen *x* satın alma miktarı:

$$x_1' = \frac{M^H}{2P_{x_1}} = \frac{900}{80} = 11{,}25 \text{ kg/ay}$$

Sırasıyla *net ie*, *ge* ve *te*:

$$\Delta x^{ie} = x_1' - x_0 = 11{,}25 - 10 = 1{,}25$$

$$\Delta x^{ge} = x_1 - x_1' = 12{,}5 - 11{,}25 = 1{,}25$$

e_1' denge noktasına karşılık gelen x tüketim düzeyi x_1' kadardır. x'i y malına ikame etmemizden dolayı, $x_0 - x_1'$ kadar bir *ikame etkisi* oluşur. Diğer yandan, P_x'in düşmesi nedeniyle bireyin reel gelirinde bir artış olur. Yani birey her iki maldan da daha fazla tüketebilme olanağına kavuşur. Bu nedenle bireyin fayda düzeyi, daha yukarıda yer alan U_1'e çıkar. Bu durumda bütçe doğrusunun eğimi, yeni göreli mal fiyatlarını ve yeni dengeyi yansıtacak şekilde U_1'e teğet biçimde sağa kayar. x malı tüketim düzeyi, x_1''den x_1'e artmış olmaktadır. Bu kısım *gelir etkisi*dir (Şekil 11).

Bu örneğimizde x malının normal mal olduğu varsayılmıştır. Bu nedenle, P_x'deki azalma, x'in satın alınan miktarını artırmıştır. Yani talep yasası gerçekleşmiştir.

Talep yasası, gelir etkisinin ters yönde işlediği durumlarda geçerliliğini yitirir. Bu türden mallar, Giffen malı (aşırı bayağı mal) olarak tanımlanmaktadır. Giffen malları aşırı bayağıdır ve pozitif eğimli talep eğrisine sahiptir. Şekil 12 ve 13'te bayağı ve Giffen malı durumları için ikame ve gelir etkileri gösterilmiştir.

Slutsky Denkleminin Türetilmesi

$$x^H(P_x, P_y, U_0) = x^{\mathrm{M}}\left(P_x, P_y, M_0(P_x, P_y, U_0)\right)$$

Yukarıdaki eşitliğin her iki yanının P_x 'e göre türevini alalım:

$$\frac{\partial x^H}{\partial P_x} = \frac{\partial x^M}{\partial P_x} + \frac{\partial x^M}{\partial M}\frac{\partial M_0}{\partial P_x}$$

$$\frac{dx^H}{dP_x}\Big|_{\substack{dU=0\\ dP_y=0}} = \frac{dx^M}{dP_x}\Big|_{\substack{dM=0\\ dP_y=0}} + \left(\frac{dx^M}{dM}\Big|_{\substack{dP_x=0\\ dP_y=0}}\right)\left(\frac{dM_0}{dP_x}\Big|_{\substack{dU=0\\ dP_y=0}}\right)$$

Denklemlerde kullanılan simgelerin anlamları şöyledir: x^M, Marsallgil talep; x^H, Hicksgil talep; M_0, fiyat değişimi öncesi (başlangıçtaki) parasal gelir düzeyi.

Ayrıca kısmi türevlerin yanlarında yer alan örneğin $dU = 0, dP_y = 0$ gibi ifadeler, toplam faydanın ve y'nin fiyatının sabit tutulmakta olduğunu belirtmektedir.

Son ifadeyi yeniden düzenleyerek Slutsky denklemine ulaşırız:

$$\frac{dx^M}{dP_x}\Big|_{\substack{dM=0\\ dP_y=0}} = \frac{dx^H}{dP_x}\Big|_{\substack{dU=0\\ dP_y=0}} - \left(\frac{dx^M}{dM}\Big|_{\substack{dP_x=0\\ dP_y=0}}\right)\left(\frac{dM_0}{dP_x}\Big|_{\substack{dU=0\\ dP_y=0}}\right)$$

Slutsky denkleminin sağındaki son terim x^M'ye eşittir. Bunu görelim (Shephard Teoremi).

$$M_0 = P_x x^M + P_y y^M \quad \text{(Harcama fonksiyonu)}$$

$$\frac{\partial M_0}{\partial P_x} = x^M$$

$$\frac{dx^M}{dP_x}\Big|_{\substack{dM=0\\ dP_y=0}} = \frac{dx^H}{dP_x}\Big|_{\substack{dU=0\\ dP_y=0}} - x^M\left(\frac{dx^M}{dM}\Big|_{\substack{dP_x=0\\ dP_y=0}}\right)$$

İkame etkisi, düzeltilmiş talep eğrisi üzerindeki hareketlere; gelir etkisi de, Engel eğrisi (gelir-tüketim eğrisi) üzerindeki hareketlere karşılık gelir. Her iki etki birlikte, sıradan (düzeltilmemiş) talep eğrisi üzerindeki hareketleri gösterir. Bu anlamda Slutsky denklemini şöyle de ifade edebiliriz:

$$\frac{\partial x_M}{\partial P_x} = \frac{\partial x_H}{\partial P_x} + x_H \frac{\partial x_M}{\partial M}$$

Toplam Fiyat Etkisi	=	İkame Etkisi	+		Gelir Etkisi
Bayağı Talep Eğrisinin Eğimi	=	Düzeltilmiş Talep Eğrisinin Eğimi	+	x_H	(Engel Eğrisinin Eğimi)
Marshallgil Talep Eğrisinin Eğimi	=	Hicksgil Talep Eğrisinin Eğimi	+	x_H	(Engel Eğrisinin Eğimi)
$\frac{\partial x_M}{\partial P_x}$		$\frac{\partial x_H}{\partial P_x}$		$\frac{\partial M}{\partial P_x} = x^*$	$\frac{\partial x_M}{\partial M}$

x malı fiyatının (P_x)değişimi karşısında Slutsky denklemi şöyle türetilmektedir. Marshallgil talep fonksiyonunun P_x'e göre toplam değişimini alalım.

$$x_M = x_M(P_x, P_y, M)$$

$$\frac{\partial x_M}{\partial P_x} = \frac{\partial x_H}{\partial P_x} + \frac{\partial x_M}{\partial M}\frac{\partial M}{\partial P_x}$$

Harcama fonksiyonu üzerinde de P_x'deki değişimin neden olduğu gelir etkisini görelim (Shephard Teoremi).

$$M = x_H P_x + y_H P_y \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial P_x} = x_H$$

$$\frac{\partial x_M}{\partial P_x} = \frac{\partial x_H}{\partial P_x} + x_H \frac{\partial x_M}{\partial M}$$

İkame ve Gelir Etkileri Ayrıştırmasına Hicks Yaklaşımı

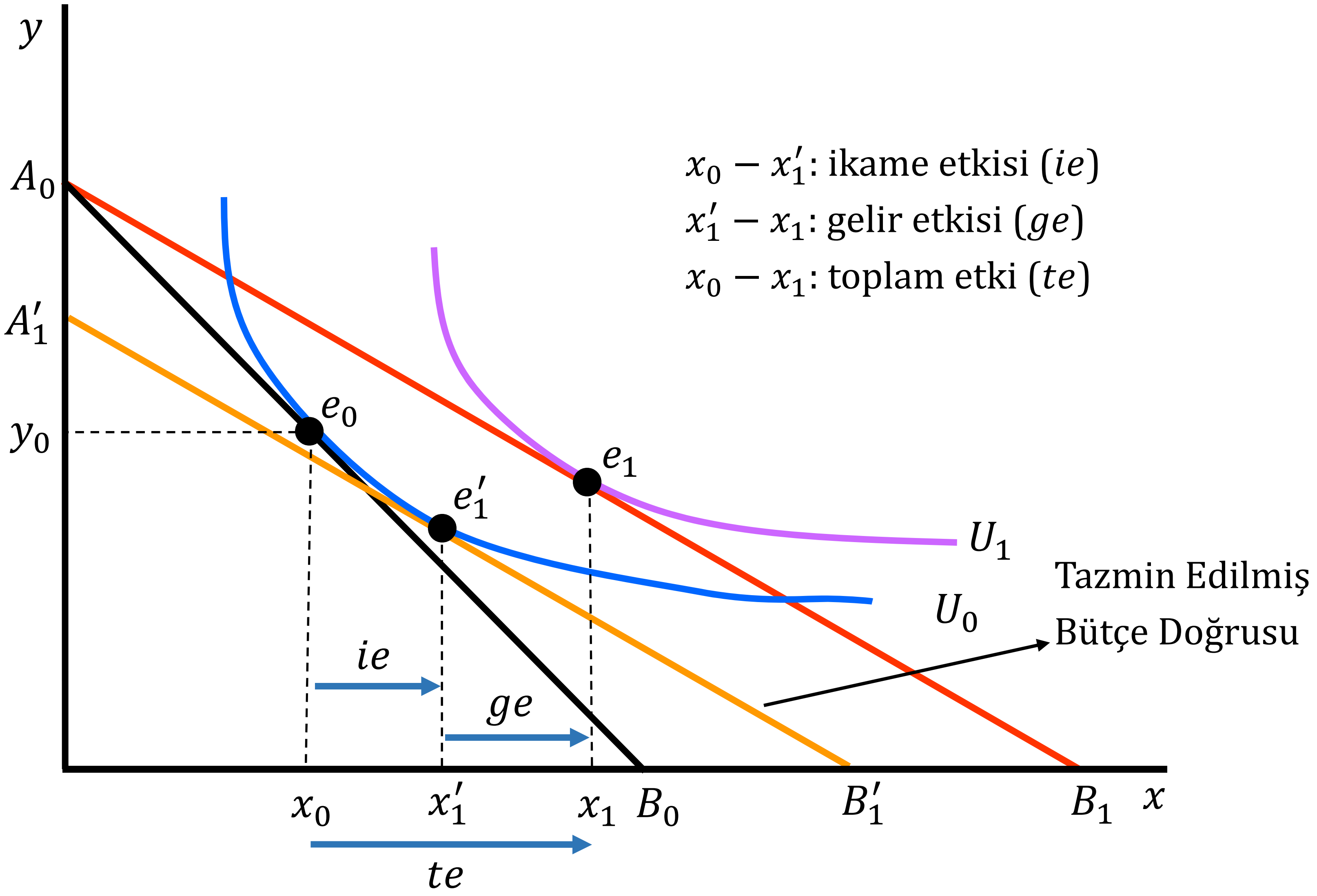
Slutsky yaklaşımında ikame ve gelir etkilerini ayrıştırırken, fiyat değişimi sonrası bireyin satın alma gücünü sabit tuttuk. Hicks yaklaşımında ise bireyin fayda düzeyini sabit tutacağız. Slutsky yaklaşımında bireyin başlangıçtaki satın alma gücüyle (yeni göreli fiyatlar altında) ne kadarlık bir sepet oluşturacağına, Hicks yaklaşımındaysa başlangıçtaki fayda düzeyini (yeni göreli fiyatlar altında) sağlayan sepetin ne olacağına bakılmaktadır. Her iki yaklaşımla elde edeceğimiz talep fonksiyonları, malların özellikleri ne olursa olsun, negatif eğimlidir. Halbuki Marshallgil yaklaşımın ortaya koyduğu sıradan talep fonksiyonları normal ve bayağı mallarda negatif, aşırı bayağı (Giffen) mallarda pozitif eğimli olabilmektedir. Hicks yöntemiyle elde edilen talep fonksiyonlarına *düzeltilmiş* (ya da *tazmin edilmiş*) *talep fonksiyonu* adını veriyoruz. Bu adlandırma, bayağı talep fonksiyonunun gelir etkisi ölçüsünde bir düzeltmeye tabi tutulmasından gelmektedir. Hicksgil (düzeltilmiş) talep eğrisi üzerindeki tüm noktalar, aynı fayda düzeyine karşılık gelmektedir.

Şekil 14, 15 ve 16 sırasıyla normal, bayağı ve aşırı bayağı (Giffen malı) mal durumlarını göstermektedir. Şekillerden dikkat edileceği gibi, tazmin edilmiş olan bütçe doğrusu, başlangıçtaki (fiyat değişiminden önceki) toplam fayda (refah) düzeyine, yeni göreli fiyatlar altında teğet olmaktadır. Örneğin Şekil 14'teki başlangıç sepeti (başlangıçtaki göreli fiyat ve gelir dikkate alındığında satın alınan optimal x ve y bileşimi) (x_0, y_0), x malının fiyatı azaldıktan sonra (x_1, y_1) sepetine dönüşmüştür. Bu sepet, aynı parasal gelir ve yeni göreli fiyatlar altındaki optimal x ve y bileşimini (sepetini) göstermekte, daha yüksek bir toplam fayda düzeyine (U_1) karşılık gelmektedir. Örneğin x malı miktarındaki toplam artış iki ögeden oluşmaktadır. Bunu belirlemek için, yeni göreli fiyatları yansıtan A_0B_1 bütçe doğrusu, başlangıç toplam fayda düzeyini gösteren U_0 kayıtsızlık eğrisine teğet olacak biçimde sol aşağı yönde kaydırılır. Şekille yaptığımız bu işlem, başlangıçtaki toplam fayda düzeyinin kısıt alındığı ve toplam harcamanın minimize edildiği Lagrange fonksiyonunun çözümüdür.

Şekil 14'te düzeltici bütçe doğrusunun (A_0B_1') U_0 kayıtsızlık eğrisine teğet olduğu denge noktasına (e_1') karşılık gelen optimal sepet (x_1', y_1'), Hicksgil (düzeltilmiş) talep eğrisine karşılık gelen satın alma miktarlarıdır. Benzer biçimde çok sayıda P_x azalma karşısında bu noktalar belirlenerek, Hicksgil talep eğrisi çizilebilir (Şekil 17). Ya da aynı sonuca, başlangıçtaki toplam fayda düzeyinin kısıt alındığı ve toplam harcamanın minimize edildiği Lagrange fonksiyonunun çözümüyle elde edilecek olan Hicksgil talep fonksiyonuyla da ulaşabiliriz. Normal bir mal için düzeltme Şekil 18, bayağı bir mal içinse Şekil 19'da yapılmıştır. Her bir fiyat düzeyi için Marsallgil (bayağı) talep eğrisi ile Hicksgil (düzeltilmiş) talep eğrisi arasındaki fark, gelir etkisi kadardır. Bu düzeltmeler yapılırken, s.43'deki Slutsky yaklaşımı kullanılabilir.

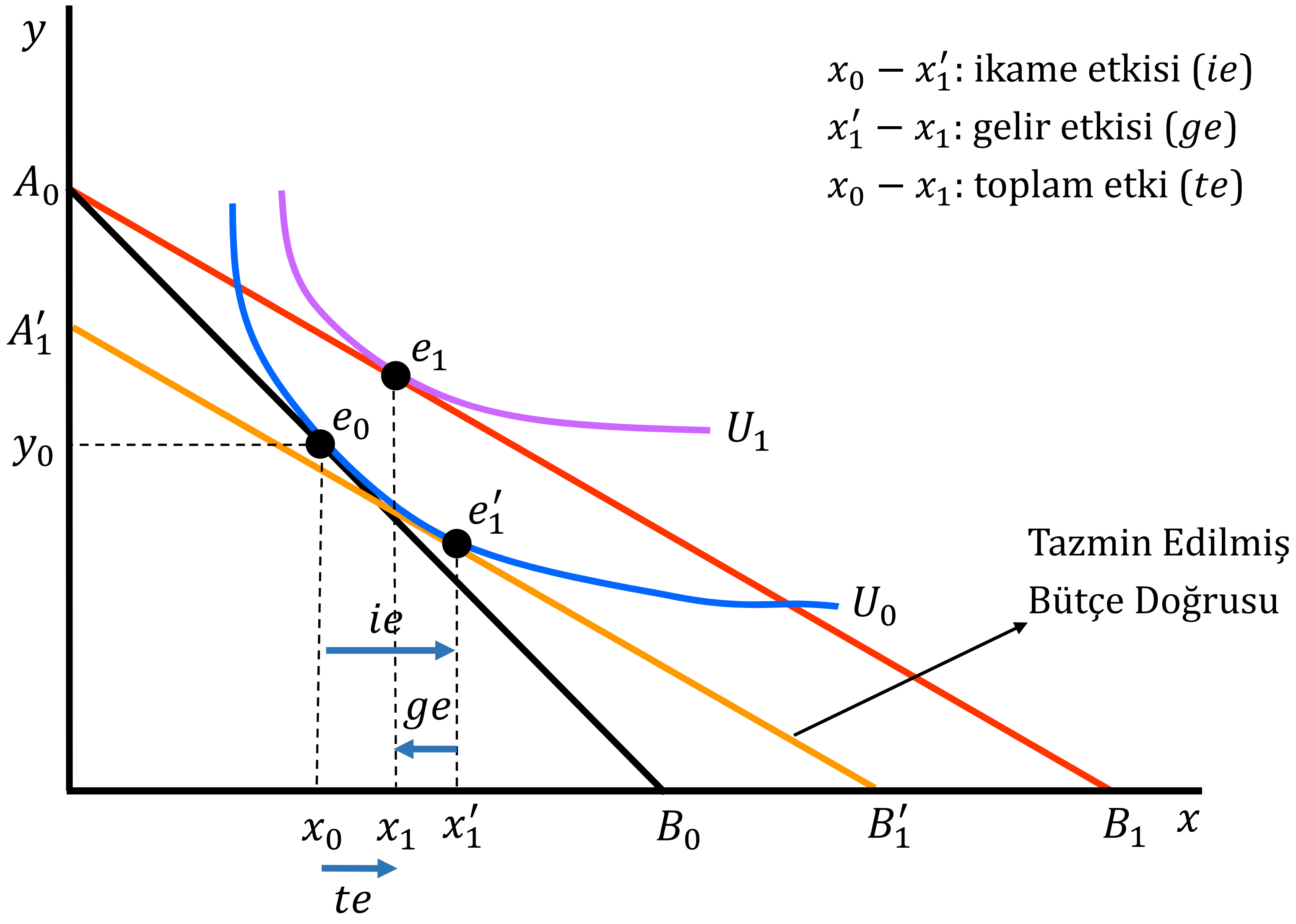
Şekil 14. Gelir ve İkame Etkileri: Normal Mal

P_x azalıyor



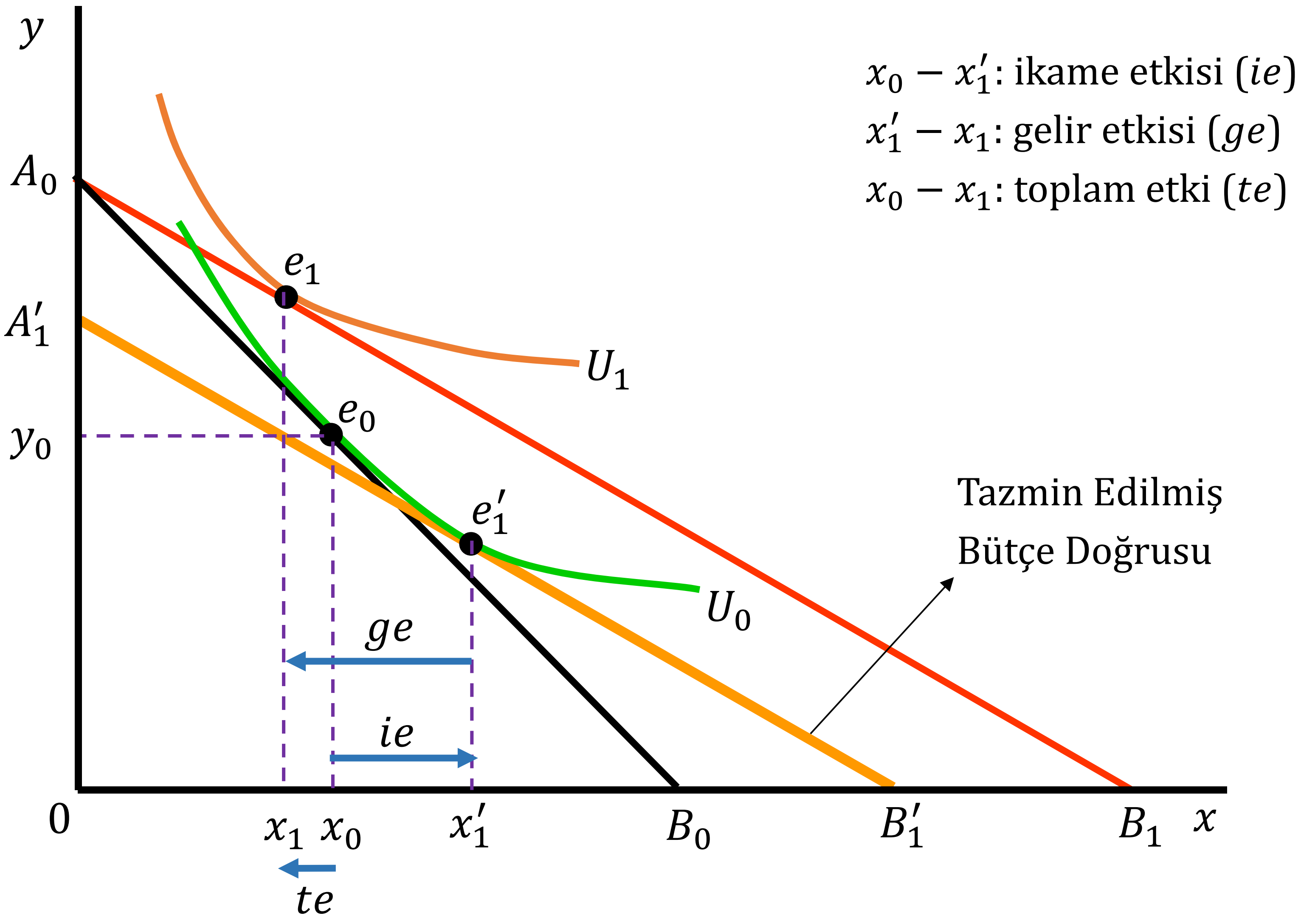
Şekil 15. Gelir ve İkame Etkileri: Bayağı Mal

P_x azalıyor

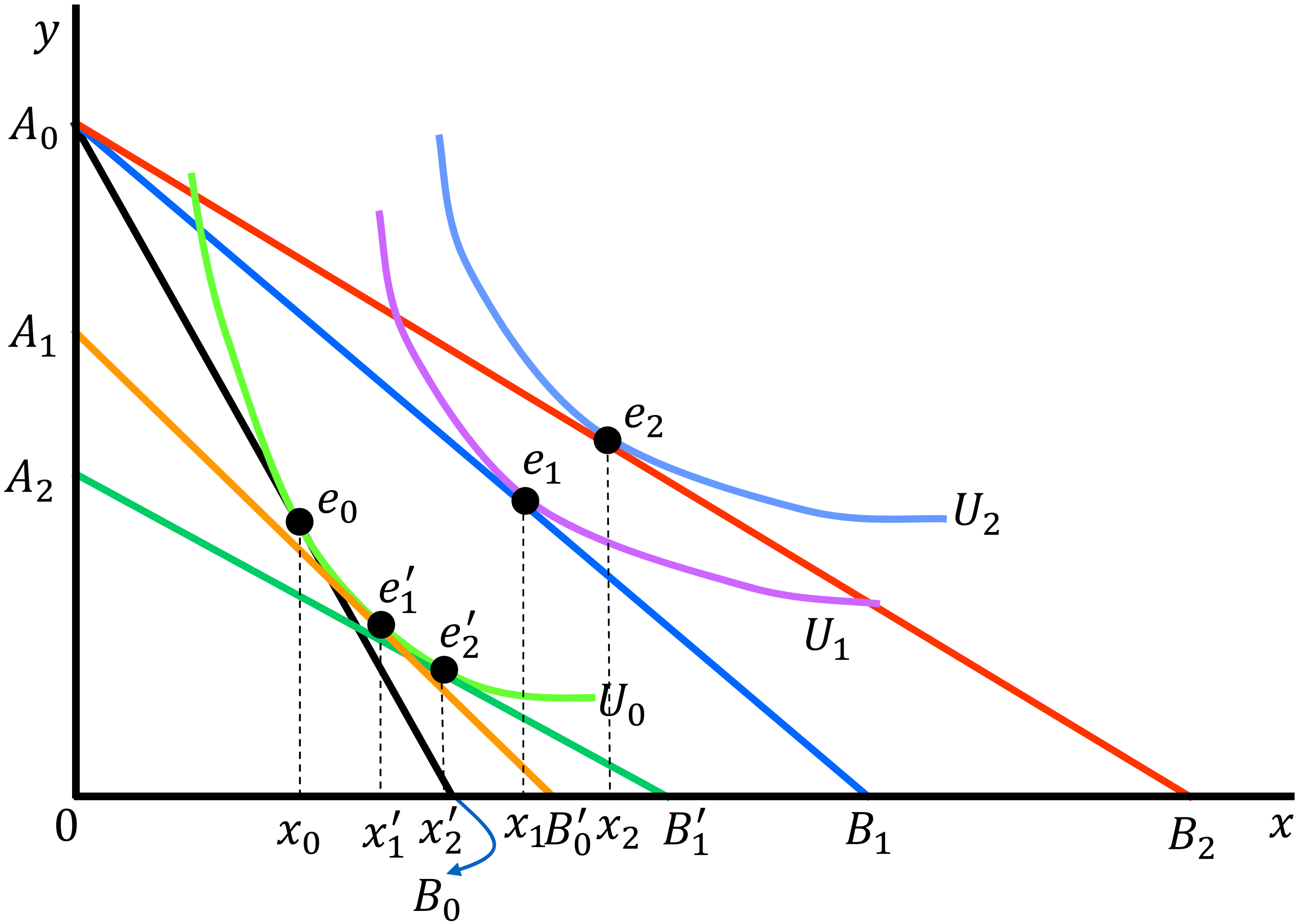


Şekil 16. Gelir ve İkame Etkileri: Giffen Malı

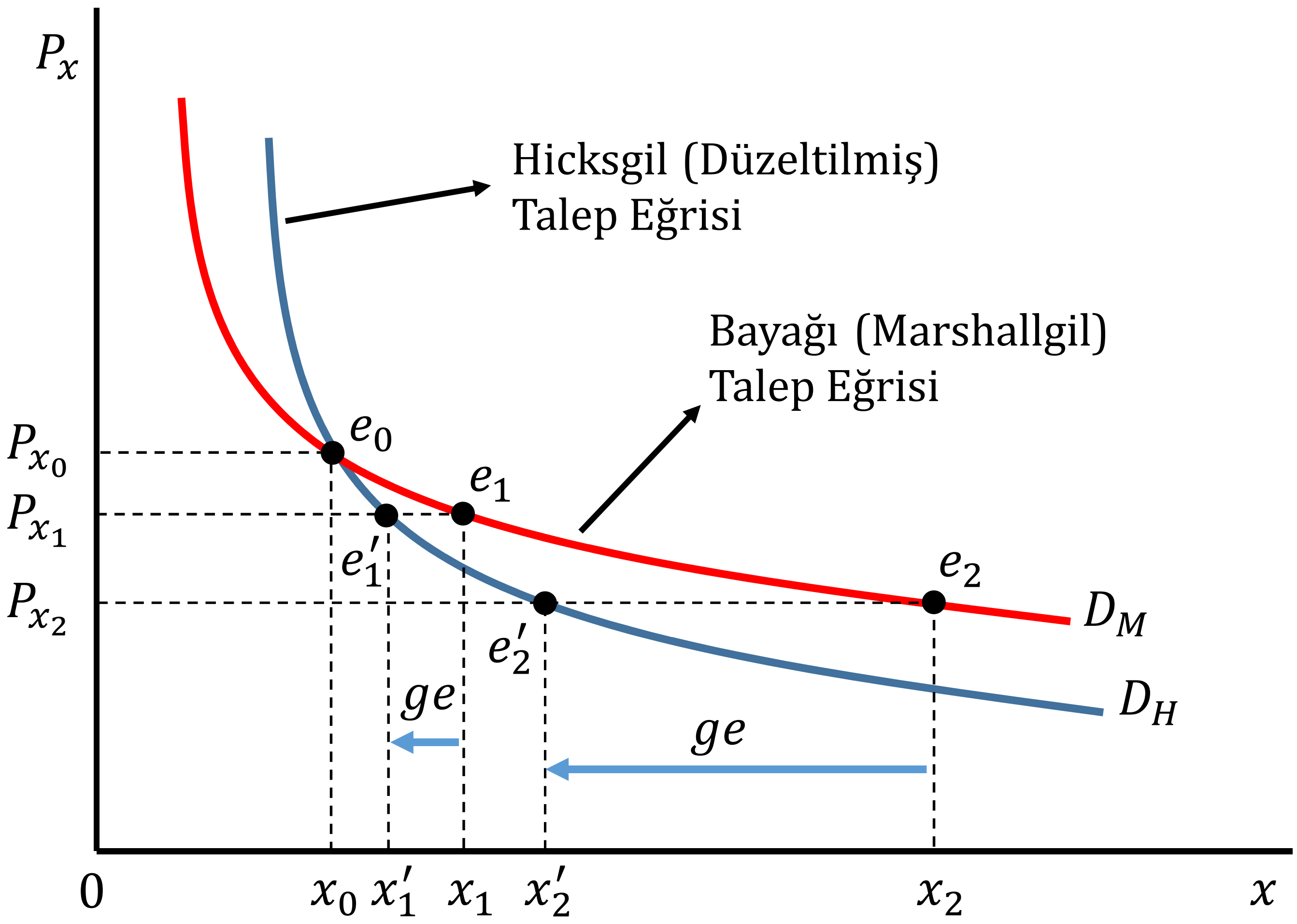
P_x azalıyor



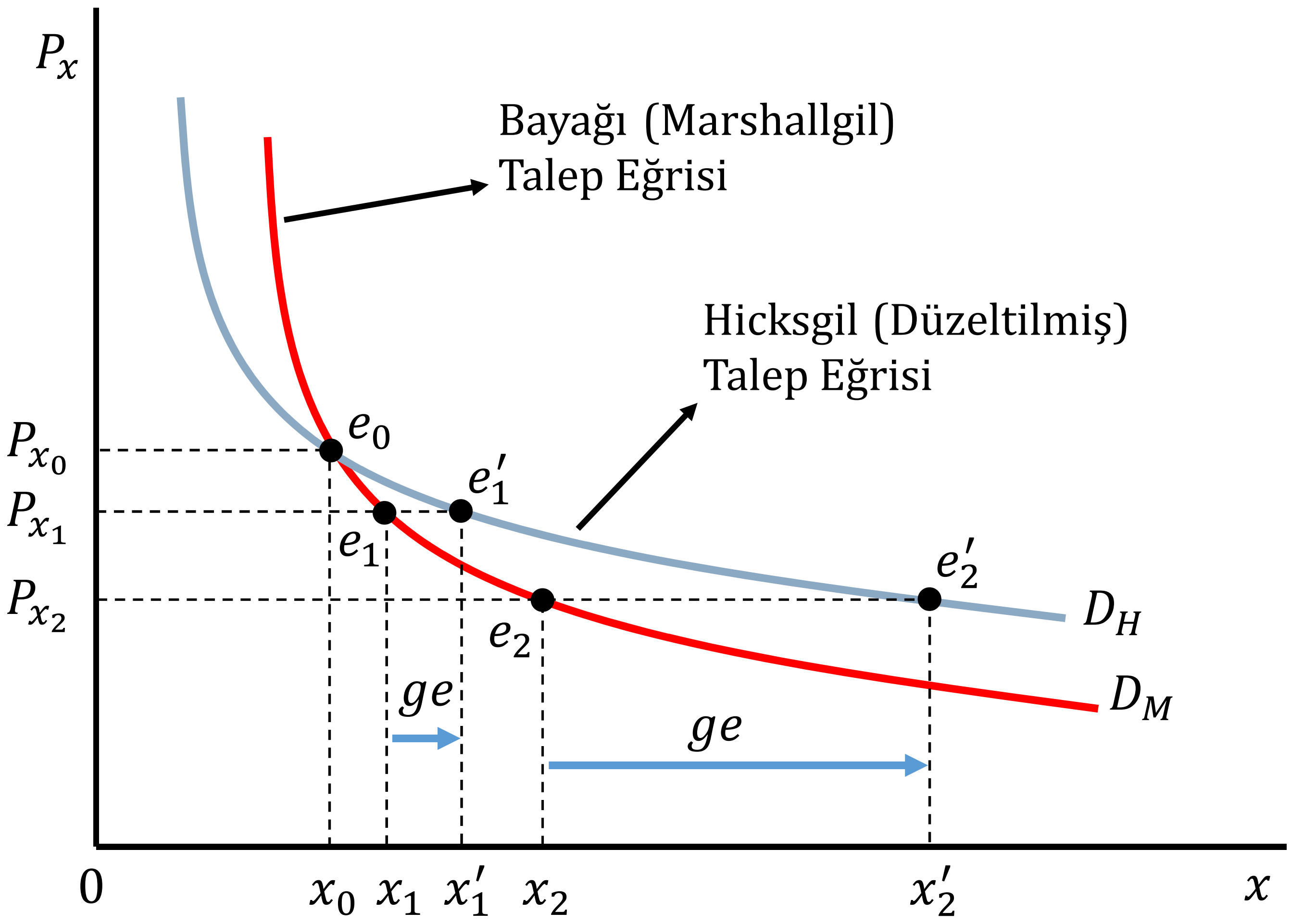
Şekil 17. Marshallgil Talep Fonksiyonunun Hicks Yaklaşımıyla Düzeltilmesi



Şekil 18. Normal Mal İçin Hicks Yaklaşımıyla Düzeltilmiş Talep Eğrisi



Şekil 19. Bayağı Mal İçin Hicks Yaklaşımıyla Düzeltilmiş Talep Eğrisi



Şimdi Hicksgil talep eğrilerini Lagrange fonksiyonunu kullanarak elde edelim. Marshallgil talep fonksiyonlarını elde ederken Lagrange problemini bütçe kısıtı altında toplam faydanın maksimize edilmesi üzerine oluşturmuştuk. Burada ise bu problemin dualini (ikincili) oluşturarak çözeceğiz. Yani başlangıçtaki toplam fayda kısıtı altında toplam harcamayı minimize eden bir Lagrange problemi kurgulayacağız. Bu durumda Lagrange fonksiyonunu şöyle oluştururuz ve çözeriz:

$$\underset{\min}{\left(xP_x + yP_y\right)} \;, \quad x, y \geq 0 \;, U_0 - U(x,y) \geq 0$$

$$Z = \underset{\min}{\left(xP_x + yP_y\right)} + \mu\left(U_0 - U(x,y)\right)$$

$$\left.\begin{aligned} Z_x &= P_x - \mu U_x(x,y) = 0 \\ Z_y &= P_y - \mu U_y(x,y) = 0 \end{aligned}\right\} \boxed{MRS_{xy} = \frac{U_x}{U_y} = \frac{P_x}{P_y}} \longrightarrow \text{Tüketici denge koşulu}$$

$$Z_\mu = U_0 - U(x,y) = 0$$

Gelir ve fiyat düzeyleri aynıyken, her iki problemin çözümünden elde edilecek olan optimal x ve y değerlerinin aynı olacağına dikkat edelim.

Problemin ikinci sıra koşulu da şöyledir:

$$\overline{H} = \begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} & Z_{x\mu} \\ Z_{yx} & Z_{yy} & Z_{y\mu} \\ Z_{\mu x} & Z_{\mu y} & Z_{\mu\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu U_{xx} & -\mu U_{xy} & U_x \\ -\mu U_{yx} & -\mu U_{yy} & U_y \\ U_x & U_y & 0 \end{bmatrix} < 0$$

$$\overline{H} = \mu\left(U_{xx}U_y^2 - U_{xy}U_xU_y + U_{yy}U_x^2\right) < 0$$

$$+ \quad - \quad + \qquad + \quad + \; + \qquad - \quad +$$

Daha önce Marshallgil talep fonksiyonunu elde etmek için kullandığımız Cobb-Douglas toplam fayda fonksiyonunu yeniden kullanarak Hicksgil talep fonksiyonunu belirleyelim.

$$U = U(x,y) = x^\alpha y^\beta \ , \ x,y \geq 0 \ , 0 < \alpha, \beta < 1$$

$$M = xP_x + yP_y$$

$$\underset{\min}{Z} = (xP_x + yP_y) + \mu\left(U_0 - x^\alpha y^\beta\right)$$

$$\left.\begin{aligned} Z_x &= P_x - \mu\alpha x^{\alpha-1}y^\beta = 0 \\ Z_y &= P_y - \mu\beta x^\alpha y^{\beta-1} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \mu = \frac{P_x}{\alpha x^{\alpha-1}y^\beta} = \frac{P_y}{\beta x^\alpha y^{\beta-1}}$$

$$y = \frac{\beta}{\alpha}\frac{P_x}{P_y}x$$

$$Z_\lambda = U_0 - x^\alpha y^\beta = 0$$

$$x_H = \left[\frac{U_0}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{1}{P_y}\right)^\beta}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} P_x^{\frac{-\beta}{\alpha+\beta}}$$

$\longrightarrow$ x malının Hicksgil (düzeltilmiş) talep foksiyonu (Şekil 20)

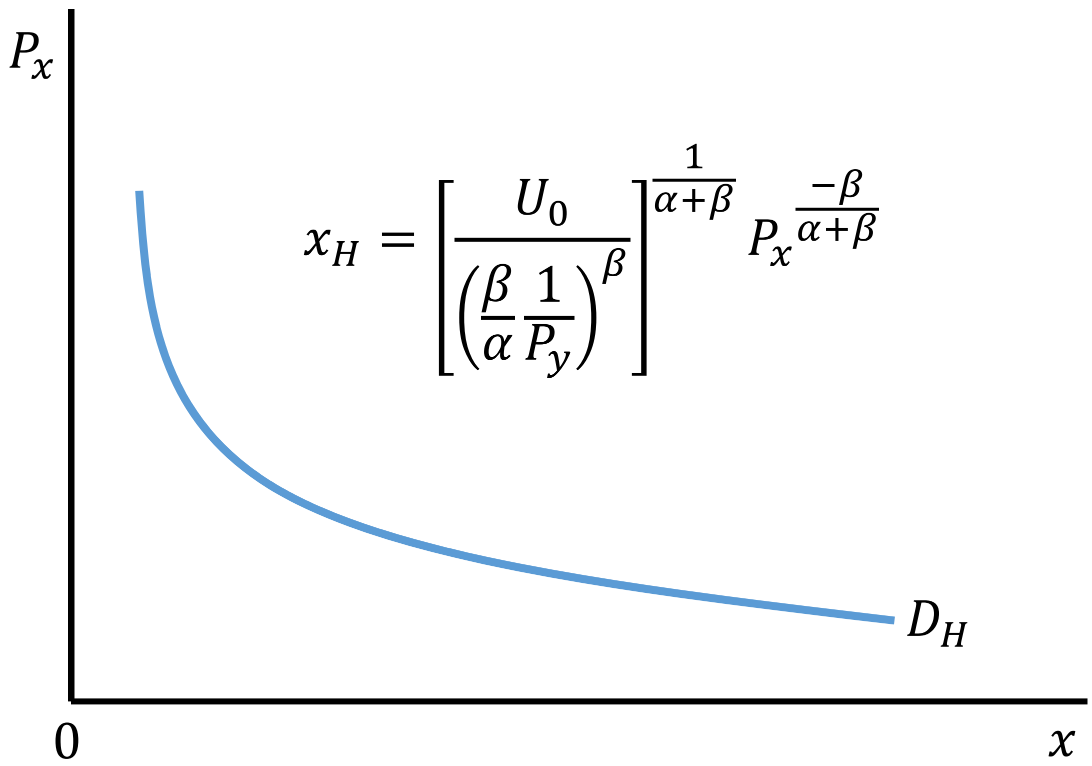
Problemin ikinci sıra koşulu da şöyledir:

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} & Z_{x\mu} \\ Z_{yx} & Z_{yy} & Z_{y\mu} \\ Z_{\mu x} & Z_{\mu y} & Z_{\mu\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{xx} & U_{xy} & P_x \\ U_{yx} & U_{yy} & P_y \\ P_x & P_y & 0 \end{bmatrix} < 0$$

$$Z_{xx} = U_{xx} = \frac{\partial(P_x - \mu\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta})}{\partial x} = \mu\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^{\beta} = \underset{++}{\mu\alpha}\underset{-}{(\alpha-1)}\underset{+}{\frac{U(x,y)}{x}} < 0$$

$$\bar{H} = \left[\underset{++}{\mu\alpha}\underset{-}{(\alpha-1)}\underset{+}{\frac{U(x,y)}{x}}\right]\underset{+}{P_y^2} - \left[\underset{+++}{\mu\alpha\beta}\underset{+}{\frac{U(x,y)}{xy}}\right]\underset{++}{P_x P_y} + \left[\underset{++}{\mu\beta}\underset{-}{(\beta-1)}\underset{+}{\frac{U(x,y)}{y}}\right]\underset{+}{P_x^2} < 0$$

Şekil 20. Hicksgil (Düzeltilmiş) Talep Eğrisi



Benzer biçimde y malının Hicksgil talep fonksiyonu elde edilebilir.

$$y_H = \frac{\beta}{\alpha}\frac{P_x}{P_y} x_H$$

$$x_H = \left[\frac{U_0}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{1}{P_y}\right)^{\beta}}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} P_x^{\frac{-\beta}{\alpha+\beta}}$$

$$y_H = \left[\frac{U_0}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{P_x}\right)^{\alpha}}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} P_y^{\frac{-\alpha}{\alpha+\beta}}$$

y malının Hicksgil (düzeltilmiş) talep fonksiyonu

Harcama Fonksiyonu:

$$M^{\mathrm{H}} = x_H P_x + y_H P_y$$

$$M^{\mathrm{H}} = \left[\frac{U_0}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{1}{P_y}\right)^{\beta}}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} P_x{}^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} + \left[\frac{U_0}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{P_x}\right)^{\alpha}}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} P_y{}^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

Marshallgil talep fonksiyonu bölümünde kullandığımız sayısal örneği burada kullanmaya devam edelim ve Hicksgil (düzeltilmiş) x ve y satın alma miktarlarını belirleyelim. İlk olarak bireyin parasal geliri (M), y malının fiyatı (P_y) ve bireyin toplam fayda fonksiyonu parametreleri (α, β) sabitken, x malı fiyatının $P_{x_1} = 9$'a düştüğünü varsayarak, Marshallgil talep miktarlarının ne olacağına bakalım. Ardından yeni fiyat durumunda oluşan düzeltilmiş satın alma miktarlarını elde ederek, net ikameyi bulalım.

$$\alpha = 0{,}5, \beta = 0{,}5, P_y = 8, M_0 = 1000, U_0 = 55{,}9, P_{x_0} = 10, P_{x_1} = 9$$

$$x_1 = \left[\frac{M_0}{(1 + (\beta/\alpha))}\right] P_{x_1}^{-1}, \qquad y_1 = \left[\frac{M_0}{(1 + (\alpha/\beta))}\right] P_{y_0}^{-1}$$

$$x_1 = 55{,}56, \qquad y_1 = 62{,}5, \qquad \mu = 0{,}322, \qquad U_1 = 58{,}93$$

Cobb-Douglas fayda fonksiyonunun bir özelliği olarak, P_x değişmesine karşın, y satın alma miktarında bir değişiklik olmadığına dikkat edelim.

Marshallgil talep fonksiyonu bölümünde kullandığımız sayısal örneği burada kullanmaya devam edelim ve Hicksgil (düzeltilmiş) x ve y satın alma miktarlarını belirleyelim. İlk olarak bireyin parasal geliri (M), y malının fiyatı (P_y) ve bireyin toplam fayda fonksiyonu parametreleri (α, β) sabitken, x malı fiyatının $P_{x_1} = 9$'a düştüğünü varsayarak, Marshallgil talep miktarlarının ne olacağına bakalım. Ardından yeni fiyat durumunda oluşan düzeltilmiş satın alma miktarlarını elde ederek, net ikameyi bulalım.

$$\alpha = 0{,}5, \beta = 0{,}5, P_y = 8, M_0 = 1000, U_0 = 55{,}9, P_{x_0} = 10, P_{x_1} = 9$$

$$x_H = \left[\frac{U_0}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{1}{P_y}\right)^{\beta}}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} P_x^{\frac{-\beta}{\alpha+\beta}} \quad \rightarrow x_H = 52{,}7$$

$$y_H = \left[\frac{U_0}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{P_x}\right)^{\alpha}}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} P_x^{\frac{-\alpha}{\alpha+\beta}} \rightarrow y_H = 59{,}3$$

P_x'in azalmasından sonra bireyin aynı toplam fayda (refah) düzeyinde ($U_0 = 55{,}9$) kalmasını sağlayacak gelir düzeyini, harcama fonksiyonunu kullanarak belirleyebiliriz.

$$M^{\mathrm{H}} = x_1' P_{x_1} + y_1' P_{y_0}$$

$$M^{\mathrm{H}} = (52{,}7)(9) + (59{,}3)(8) = 948{,}7$$

Bireyi aynı toplam fayda (refah) düzeyinde tutmak için gereken gelir desteği:

$$S = M^{\mathrm{H}} - M_0$$

$$S = 948{,}7 - 1000 = -51{,}3$$

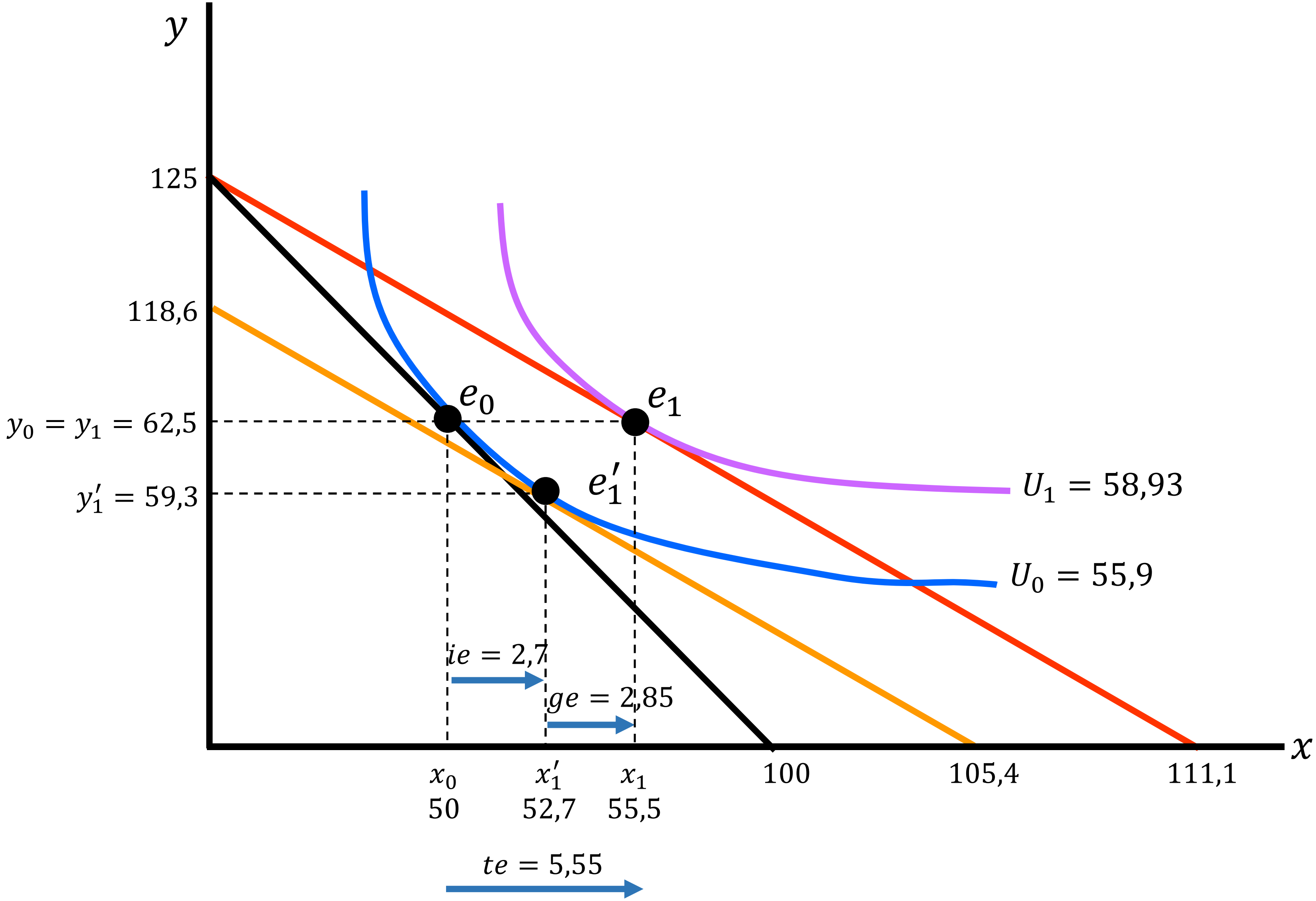
P_x'in azalmasından sonra oluşan ikame etkisi (ie), gelir etkisi(ge) ve toplam etki(te) şöyledir (Şekil 21 ve 22):

$$ie = x_1' - x_0 = 52{,}7 - 50 = 2{,}7$$

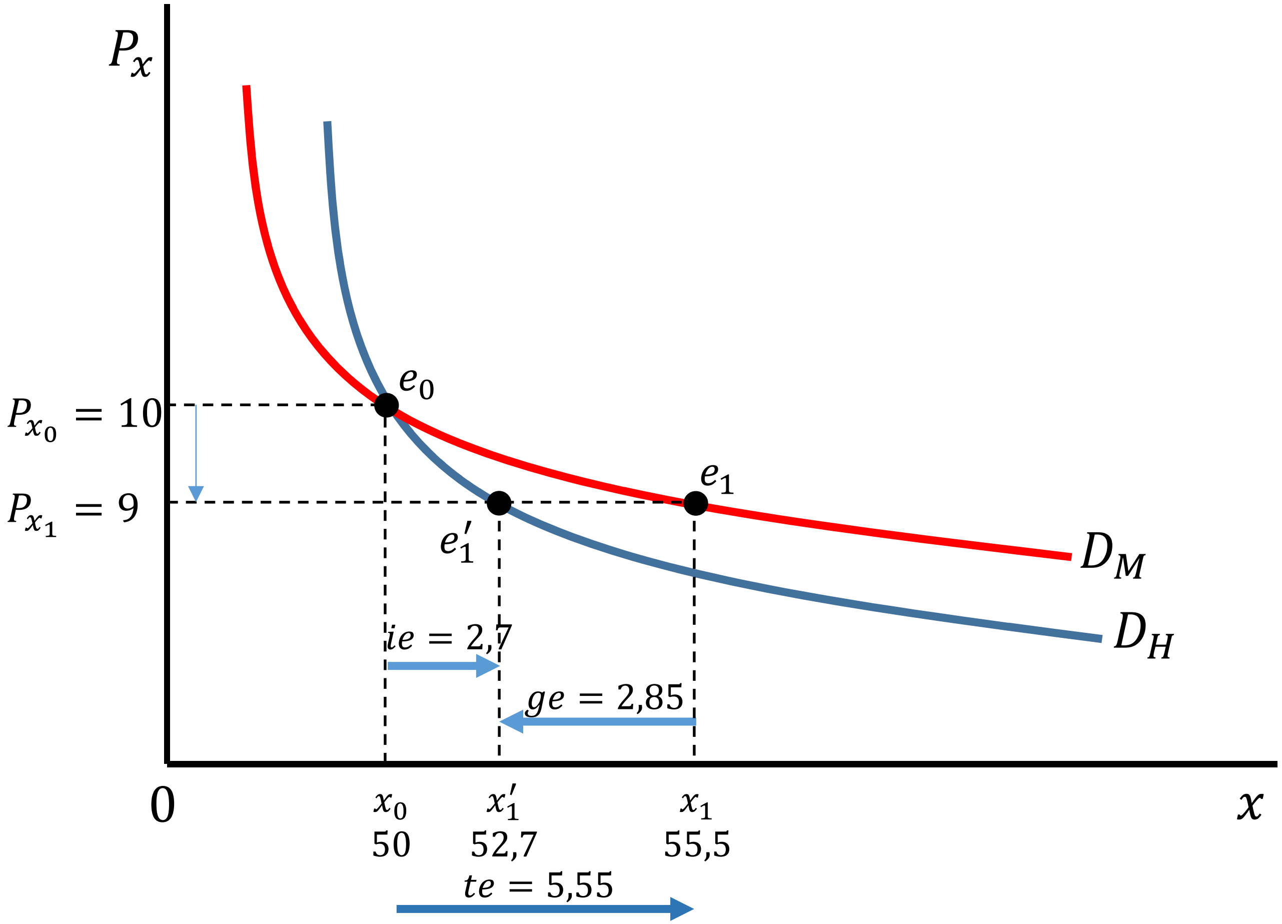
$$ge = x_1 - x_1' = 55{,}56 - 52{,}7 = 2{,}85$$

$$te = x_1 - x_0 = 55{,}56 - 50 = 5{,}55$$

Şekil 21. Gelir ve İkame Etkileri: Normal Mal



Şekil 22. Normal Mal İçin Hicks Yaklaşımıyla Düzeltilmiş Talep Eğrisi



Dolaylı Fayda Fonksiyonu, Harcama Fonksiyonu, Roy Özdeşliği ve Shephard Teoremi

Roy özdeşliği dolaylı fayda fonksiyonu ile Marshallgil talep fonksiyonu, Shephard teoremi de harcama fonksiyonu ve Hicksgil talep fonksiyonu arasında bağlantı kurmaktadır. Bu iki yaklaşımı anlayabilmek için, öncelikle *dolaylı fayda fonksiyonu* ve *harcama fonksiyonu* kavramlarını tanımalıyız.

Dolaylı Fayda Fonksiyonu

Daha önceki konularda Marshallgil talep fonksiyonlarının nasıl elde edileceğini görmüştük. Bütçe kısıtı altında bireyin toplam faydasını maksimize eden Lagrange probleminin çözümünden elde ettiğimiz Marshallgil talep fonksiyonlarını, toplam fayda fonksiyonundaki yerlerine yazar ve düzenlersek, elde edeceğimiz fonksiyona *dolaylı fayda fonksiyonu* adını veririz. Dolaylı fayda fonksiyonu (V) sepete katılan malların fiyatları ve bireyin gelirinin bir fonksiyonu haline gelmiş olur.

$$U = U\left(x\left(P_x, P_y, M, \boldsymbol{\theta}\right), y\left(P_x, P_y, M, \boldsymbol{\theta}\right)\right)$$

$$V = V\left(P_x, P_y, M, \boldsymbol{\theta}\right) \longrightarrow$$ dolaylı fayda fonksiyonu

Daha önce Cobb-Douglas fayda fonksiyonunu kullanarak x ve y mallarının Marshallgil talep fonksiyonlarını bulmuştuk. Bunları toplam fayda fonksiyonundaki yerlerine yazarak, dolaylı fayda fonksiyonunu oluşturalım. $\boldsymbol{\theta}$, fayda fonksiyonundaki parametreleri temsil eden bir vektördür.

$$x = \left[\frac{M}{(1 + (\beta/\alpha))P_x}\right], \qquad y = \left[\frac{M}{(1 + (\alpha/\beta))P_y}\right]$$

$$U = U(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta}$$

$$V = V\left(P_x, P_y, M, \alpha, \beta\right) = \left[\frac{M}{(1 + (\beta/\alpha))P_x}\right]^{\alpha} \left[\frac{M}{(1 + (\alpha/\beta))P_y}\right]^{\beta}$$

$$V = V\left(P_x, P_y, M, \alpha, \beta\right) = \frac{M^{(\alpha+\beta)}}{(1 + (\beta/\alpha))^{\alpha}(1 + (\alpha/\beta))^{\beta} P_x^{\alpha} P_y^{\beta}} \longrightarrow$$ dolaylı fayda fonksiyonu

Harcama Fonksiyonu

Toplam fayda kısıtı altında toplam harcamayı minimize eden Lagrange probleminin çözümünden elde ettiğimiz Hicksgil talep fonksiyonlarını, bütçe denklemindeki yerlerine yazar ve düzenlersek, *harcama fonksiyonu*nu elde ederiz. Harcama fonksiyonu, veri bir fayda düzeyi ve mal fiyatları altında, bu veri fayda düzeyinin elde edilebilmesi için gereken en düşük harcamayı tanımlar.

$$Z\left(x, y, \lambda;\ P_x, P_y, U_0, \boldsymbol{\phi}\right) = xP_x + yP_y + \mu(U_0 - U(x, y, \boldsymbol{\phi}))$$

Bu Lagrange probleminin çözümünden elde edilen optimal x ve y değerleri (x_H, y_H), harcama fonksiyonunu (E) oluşturacaktır.

$$E\left(P_x, P_y, U_0, \boldsymbol{\phi}\right) = x_H P_x + y_H P_y$$

Daha önce Cobb-Douglas fayda fonksiyonunu kullanarak Hicksgil talep fonksiyonlarına (x_H, y_H) ve harcama fonksiyonuna ulaşmıştık. Burada yeniden yazalım.

$$E\left(P_x, P_y, U_0, \boldsymbol{\phi}\right) = \left[\frac{U_0}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{1}{P_y}\right)^{\beta}}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} P_x^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} + \left[\frac{U_0}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{P_x}\right)^{\alpha}}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} P_y^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

Roy Özdeşliği

Roy özdeşliği, dolaylı fayda fonksiyonu ile Marshallgil talep fonksiyonu arasındaki bağlantıyı tanımlamaktadır.

$$x = -\frac{\partial V\left(P_x, P_y, M\right)/\partial P_x}{\partial V\left(P_x, P_y, M\right)/\partial M} \longrightarrow \text{Roy özdeşliği}$$

Bu özdeşliği, bütçe kısıtı altındaki toplam fayda maksimizasyonu probleminden hareketle türetebiliriz.

$$Z = \underset{\max}{U(x, y, \boldsymbol{\theta})} + \lambda\left(M - xP_x - yP_y\right)$$

Bu problemin çözümünden elde edilen optimal x ve y değerleri $(x^* y^*)$ kullanılarak, dolaylı fayda fonksiyonunu tanımlayabiliriz:

$$V(\boldsymbol{\theta}) = U(x^*(\boldsymbol{\theta}), y^*(\boldsymbol{\theta}); \boldsymbol{\theta})$$

V'nin P_x ve M'ye göre türevlerini alalım.

$$\frac{\partial V}{\partial P_x} = \frac{\partial U(x^*(\boldsymbol{\theta}), y^*(\boldsymbol{\theta}); \boldsymbol{\theta})}{\partial P_x} + \lambda^* \frac{\partial (M - x^* P_x - y^* P_y)}{\partial P_x} = -\lambda^* x^*$$

$$\frac{\partial V}{\partial M} = \frac{\partial U(x^*(\boldsymbol{\theta}), y^*(\boldsymbol{\theta}); \boldsymbol{\theta})}{\partial M} + \lambda^* \frac{\partial (M - x^* P_x - y^* P_y)}{\partial M} = -\lambda^*$$

$$x = -\frac{\partial V\left(P_x, P_y, M\right)/\partial P_x}{\partial V\left(P_x, P_y, M\right)/\partial M} = -\frac{-\lambda^* x^*}{\lambda^*} = x^*$$

Şimdi dolaylı fayda fonksiyonunu kullanarak, Roy özdeşliğini uygulayalım ve x malının talep fonksiyonunu yeniden elde edelim.

$$V(\boldsymbol{\theta}) = U(x^*(\boldsymbol{\theta}), y^*(\boldsymbol{\theta}); \boldsymbol{\theta}) = U^*$$

$$U^* = V\left(P_x, P_y, M, \alpha, \beta\right) = {x^*}^{\alpha} {y^*}^{\beta} = \left(\frac{M}{(1 + (\beta/\alpha))P_x}\right)^{\alpha} \left(\frac{M}{(1 + (\alpha/\beta))P_y}\right)^{\beta}$$

$$V = V\left(P_x, P_y, M, \alpha, \beta\right) = \frac{M^{(\alpha+\beta)}}{(1 + (\beta/\alpha))^{\alpha}(1 + (\alpha/\beta))^{\beta} P_x^{\alpha} P_y^{\beta}}$$

$$x = -\frac{\partial V\left(P_x, P_y, M\right)/\partial P_x}{\partial V\left(P_x, P_y, M\right)/\partial M} = -\frac{\dfrac{-\alpha M^{(\alpha+\beta)}(1 + (\beta/\alpha))^{\alpha}(1 + (\alpha/\beta))^{\beta} P_x^{\alpha-1} P_y^{\beta}}{\left((1 + (\beta/\alpha))^{\alpha}(1 + (\alpha/\beta))^{\beta} P_x^{\alpha} P_y^{\beta}\right)^2}}{\dfrac{(\alpha+\beta) M^{(\alpha+\beta-1)}}{(1 + (\beta/\alpha))^{\alpha}(1 + (\alpha/\beta))^{\beta} P_x^{\alpha} P_y^{\beta}}} = x^*$$

$$x = -\frac{\partial V\left(P_x, P_y, M\right)/\partial P_x}{\partial V\left(P_x, P_y, M\right)/\partial M} = -\frac{-\alpha M}{(\alpha + \beta) P_x} = x^*$$

Shephard Teoremi

Shephard teoremi, harcama fonksiyonu ile Hicksgil talep fonksiyonu arasındaki bağlantıyı tanımlamaktadır.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial V(P_x, P_x, U_0, \boldsymbol{\phi})}{\partial P_x} &= x_H(P_x, P_x, U_0, \boldsymbol{\phi}) \\
\frac{\partial V(P_x, P_x, U_0, \boldsymbol{\phi})}{\partial P_y} &= y_H(P_x, P_x, U_0, \boldsymbol{\phi}) \\
\frac{\partial V(P_x, P_x, U_0, \boldsymbol{\phi})}{\partial U_0} &= \mu(P_x, P_x, U_0, \boldsymbol{\phi})
\end{aligned}\right\} \text{Shephard teoremi}$$

Şimdi harcama fonksiyonunu kullanarak, Shephard teoremini uygulayalım ve x malının talep fonksiyonunu yeniden elde edelim.

Şimdi harcama fonksiyonunu kullanarak, Shephard teoremini uygulayalım ve x malının talep fonksiyonunu yeniden elde edelim.

$$\frac{\partial E(P_x, P_x, U_0, \boldsymbol{\phi})}{\partial P_x} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\left(x_H + y_H \frac{P_y}{P_X}\right)$$

$$y_H = \frac{\beta}{\alpha}\frac{P_x}{P_y} x_H$$

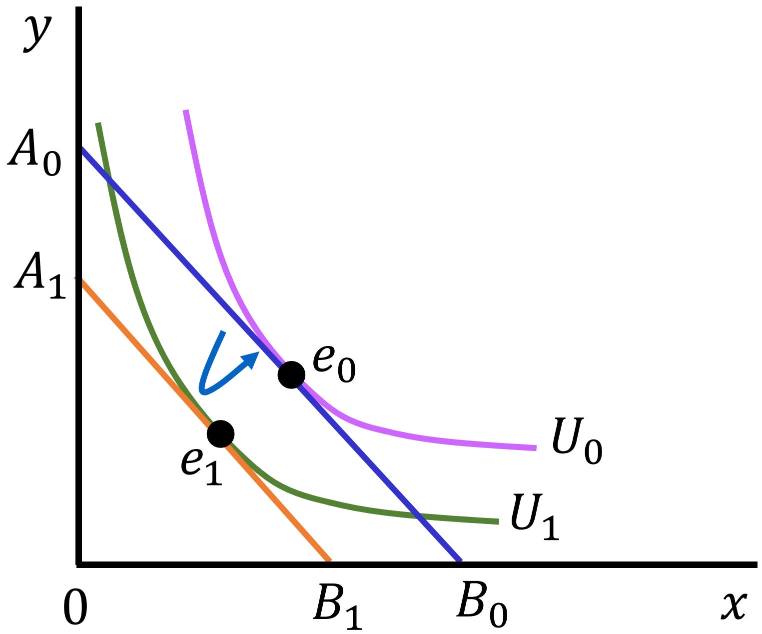
$$\frac{\partial E(P_x, P_x, U_0, \boldsymbol{\phi})}{\partial P_x} = x_H$$

Talep Fonksiyonlarının Özellikleri

1. Talep fonksiyonları sıfırıncı dereceden homojendir.

Bir talep fonksiyonundaki tüm fiyatları ve geliri aynı sayıyla çarparsak, talep düzeyinde hiçbir değişme meydana gelmez. Örneğin fiyatlar ve gelir %10 artarsa, bireyin satın alma gücünde ve göreli fiyatlarda hiçbir değişme olmadığından, talep değişmez. Bu duruma *para aldatmacasının olmaması* diyoruz.

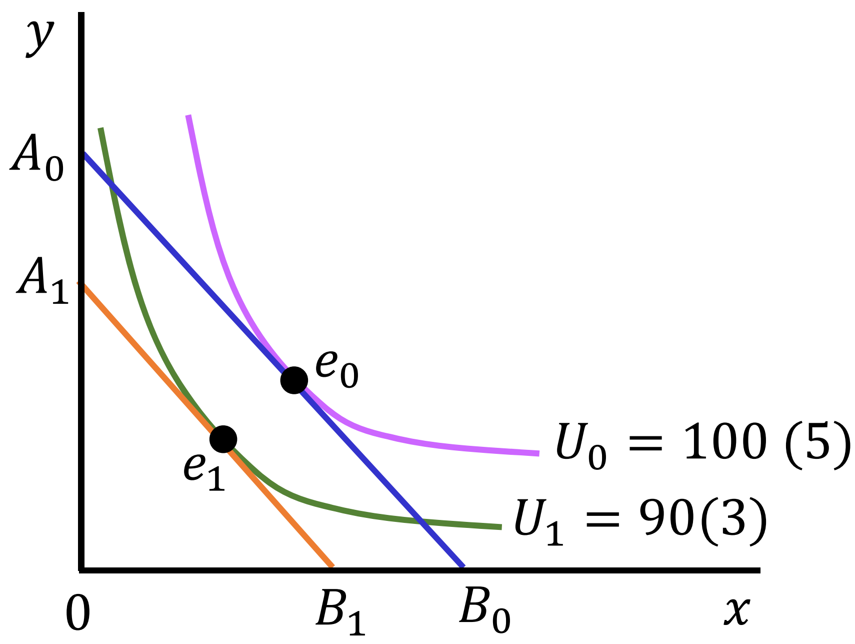
Şekil 22: Tüketici Dengesinin İç Bölgede Oluşması



2.Fayda düzeylerini gösteren kayıtsızlık eğrileri sıralıdır.

Bir kayıtsızlık eğrisi üzerinde aynı mal demetinin seçilmesi durumunda, o kayıtsızlık eğrine verilen fayda düzeyi farklı olabilir. Ancak talep üzerinde hiçbir etki oluşmaz. Örneğin aşağıdaki şekilde e_0 noktasındaki seçim, 100 ya da 5 gibi iki farklı fayda düzeyiyle ifade edilebilir.

Şekil 23: Fayda Düzeyleri Endekstir



3. Bütçenin tamamı harcanmaktadır.

Kayıtsızlık eğrileri analizine başlarken bireyin doyumsuz olduğunu ve eline geçen tüm geliri hemen harcamaya yöneltti̇ğini varsaymıştık. Bu özellik, her bir mala ait ağırlıklandırılmış gelir-talep esneklikleri toplamının bire eşit olmasıyla ifade edilebilir.

$$\frac{xP_{\mathrm{x}}}{M}\varepsilon_{xM}+\frac{yP_{\mathrm{y}}}{M}\varepsilon_{yM}=1$$

Talep Analizinde Özel Durumlar

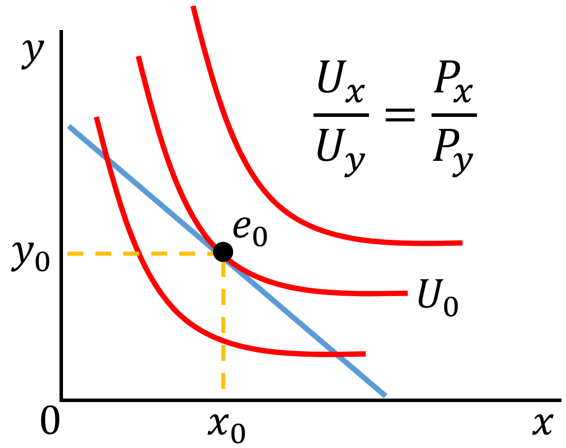
Şu ana kadar tüketicinin, farklı göreli fiyatlar ve nominal gelir altında tercihlerini kayıtsızlık eğrisi ile sıralayarak oluşturduğu bireysel talep fonksiyonunu, '*iç bölge çözümü*' olarak tanımladığımız durumlar için belirledik. Şekil 24'de oluşan tüketici dengesine göre, birey tüm bütçesini harcayarak (x_0, y_0) bileşimini içeren bir sepet satın alacaktır. Bu seçimler iç bölgede optimaliteyi sağlayan birer pozitif x ve y seçimini içermektedir. Bu nedenle iç bölge çözümü diyoruz.

$$U = U(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta} \quad , \quad \alpha\, ,\, \beta > 0$$

$$y = U_0^{\frac{1}{\beta}} x^{-\frac{\alpha}{\beta}} \qquad \text{Kayıtsızlık Eğrisi}$$

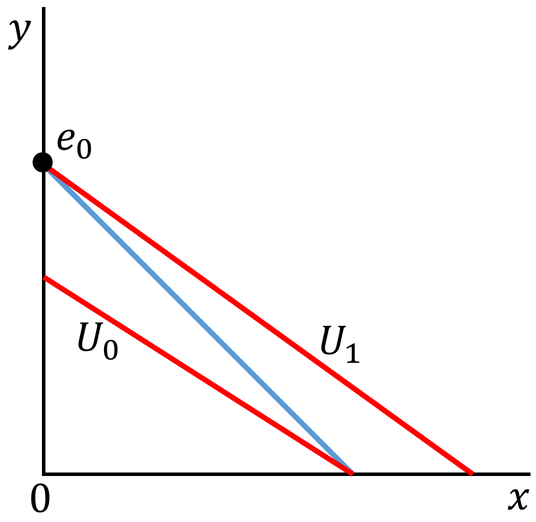
$$xP_x + yP_y = M$$

$$y = \frac{M}{P_y} - \frac{P_x}{P_y} x \qquad \text{Bütçe Denklemi}$$

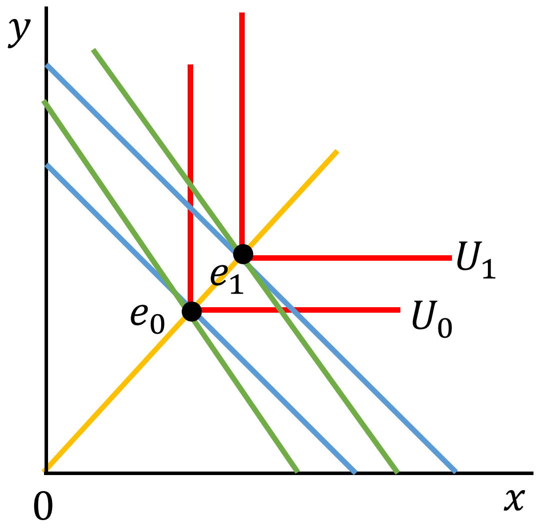


Şekil 24: Tüketici Dengesinin İç Bölgede Oluşması

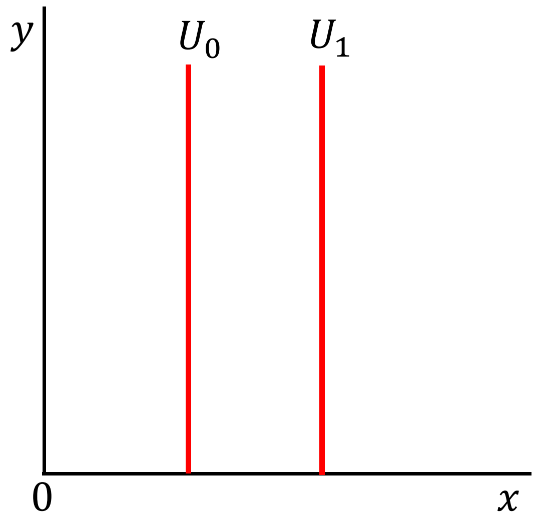
Ancak kayıtsızlık eğrisinin bazı özel durumları vardır ki iç bölge çözümü sağlanamaz. Böyle durumlarda en iyi çözüm, bir *köşe çözümü*dür. Bu durumları yansıtan kayıtsızlık eğrileri aşağıda gösterilmiştir (Şekil 25a, b, c, d, e, f).



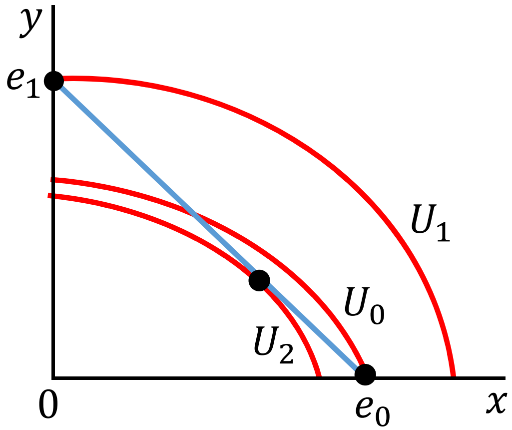
Şekil 25a
Tam İkame



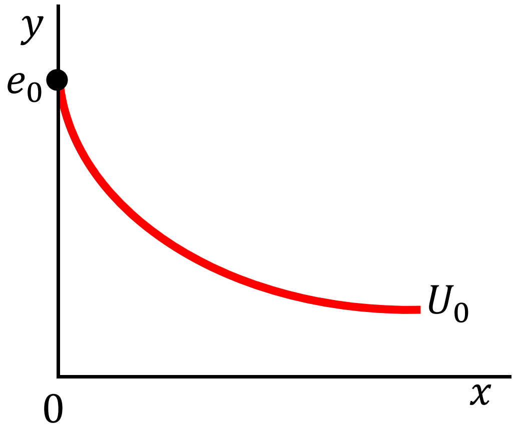
Şekil 25b
Tamamlayıcı



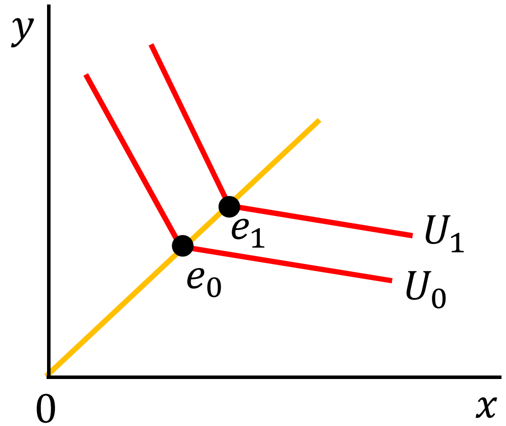
Şekil 26c
Yansızlık



Şekil 25d
İçbükey



Şekil 25e
Doğrusalımsı

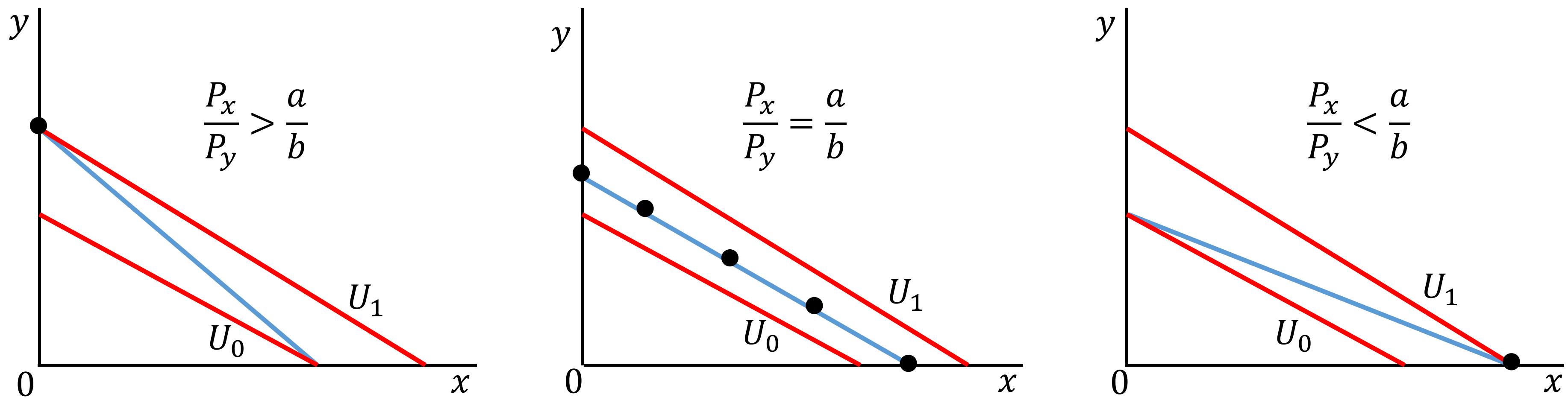


Şekil 25f
Dirsekli

1. Tam İkame Mallar

$U = U(x, y) = ax + by\,,\ a,\ b > 0$ $\qquad$ $y = \dfrac{U_0}{b} - \dfrac{a}{b}x$ Kayıtsızlık Eğrisi

$xP_x + yP_y = M \longrightarrow y = \dfrac{M}{P_y} - \dfrac{P_x}{P_y}x$ Bütçe Denklemi

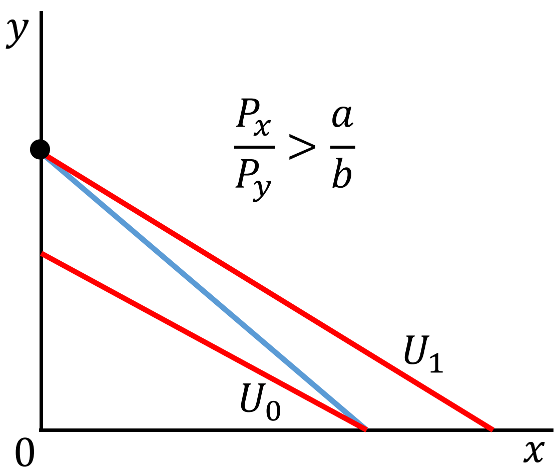


Şekil 26a $\qquad$ Şekil 26b $\qquad$ Şekil 26c

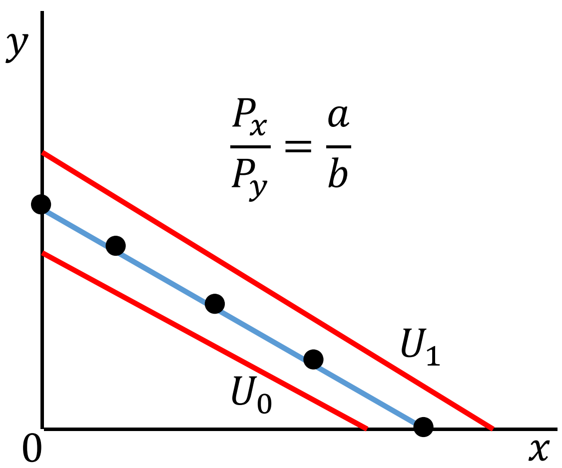
Şekil 1a : $\dfrac{P_x}{P_y} > \dfrac{a}{b}$ ise, birey tüm geliriyle yalnızca y malı satın alır $\quad y = M/P_y\,,\ x = 0$

Şekil 1b : $\dfrac{P_x}{P_y} = \dfrac{a}{b}$ ise, birey gelirini x ve y malları arasında farklı miktarlarda harcayabilir. $\quad x = (0, M/P_x)$ $\quad y = (0, M/P_y)$

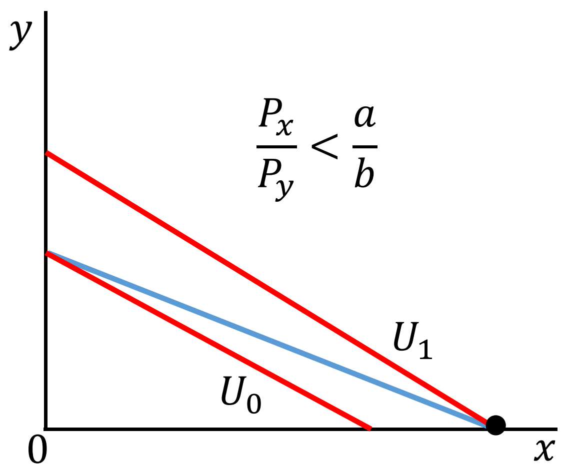
Şekil 1c : $\dfrac{P_x}{P_y} < \dfrac{a}{b}$ ise, birey tüm geliriyle yalnızca x malı satın alır: $\quad x = M/P_x\,,\ y = 0$



Şekil 26a



Şekil 26b



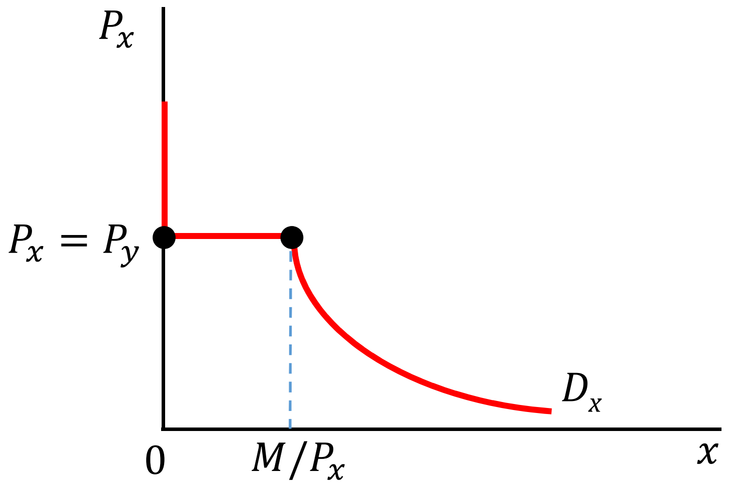
Şekil 26c

Yukarıdaki üç farklı duruma göre x malının talep eğrisi şöyle çizilecektir:

$$\frac{P_x}{P_y} > \frac{a}{b} \longrightarrow y = M/P_y\,,\ x = 0$$

$$\frac{P_x}{P_y} = \frac{a}{b} \longrightarrow \begin{aligned} x &= (0, M/P_x) \\ y &= (0, M/P_y) \end{aligned}$$

$$\frac{P_x}{P_y} < \frac{a}{b} \longrightarrow x = M/P_x\,,\ y = 0$$

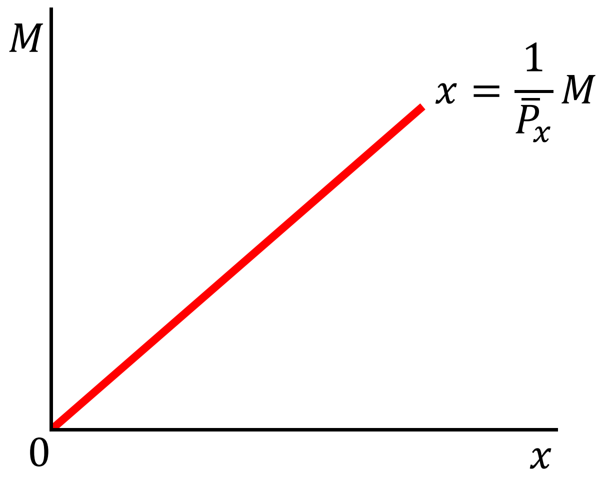


Şekil 27. *x* malının Bireysel Talep Eğrisi

Tam ikame durumunda *x* malı için Engel Eğrisi :

$$x = \frac{1}{\bar{P}_x} M$$

$$\frac{\partial x}{\partial M} = \frac{1}{\bar{P}_x} > 0$$



Şekil 28. *x* malı için Engel Eğrisi

Tam İkame Mallar için örnek :

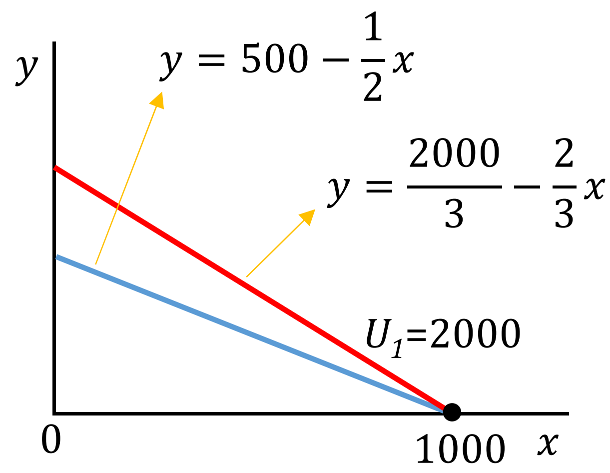
$$U = U(x, y) = 2x + 3y$$

$$M = 1000\,,\ P_x = 1\,,\ P_y = 2$$

$$x + 2y = 1000$$

0

$$y = 500 - \frac{1}{2}x \longrightarrow \text{Bütçe Denklemi}$$



Şekil 29

Kayıtsızlık Eğrisinin Denklemi : $y = \frac{U_1}{b} - \frac{a}{b}x \longrightarrow y = \frac{2000}{3} - \frac{2}{3}x$

$\frac{P_x}{P_y} = \frac{1}{2} < \frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ olduğundan, birey tüm geliriyle yalnızca x malı satın alır:

$$x = \frac{M}{P_x} = \frac{1000}{1} = 1000\ ,\ \ y = 0$$

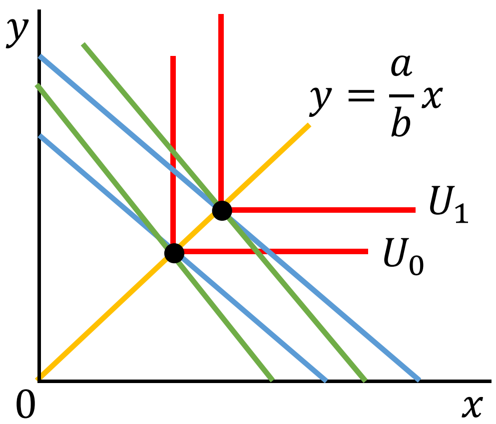
Bu durumda bireyin elde ettiği toplam fayda : $U_1 = 2(1000) + 3(0) = 2000$

2. Tamamlayıcı Mallar

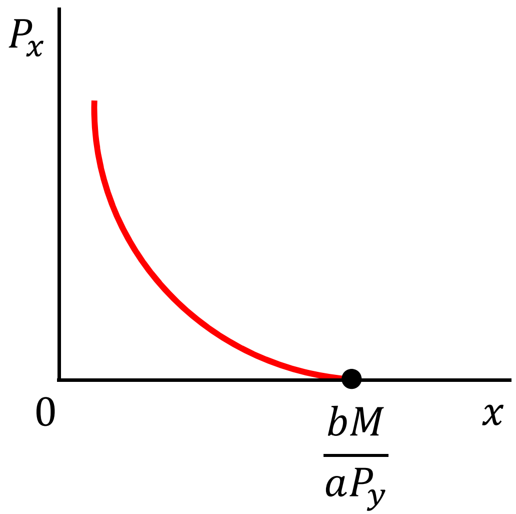
$$U = U(x, y) = \min\{ax\,, by\}\ ,\quad a,\, b > 0$$

$$xP_x + yP_y = M \quad \rightarrow \quad y = \frac{M}{P_y} - \frac{P_x}{P_y}x \qquad xP_x + \left(\frac{a}{b}x\right)P_y = M \quad \rightarrow \quad \boxed{x = \frac{M}{P_x + \left(\frac{a}{b}\right)P_y}}$$

$$ax = by \quad \rightarrow \quad y = \frac{a}{b}x$$



Şekil 30a : *x* ve *y* malları tamamlayıcıdır.

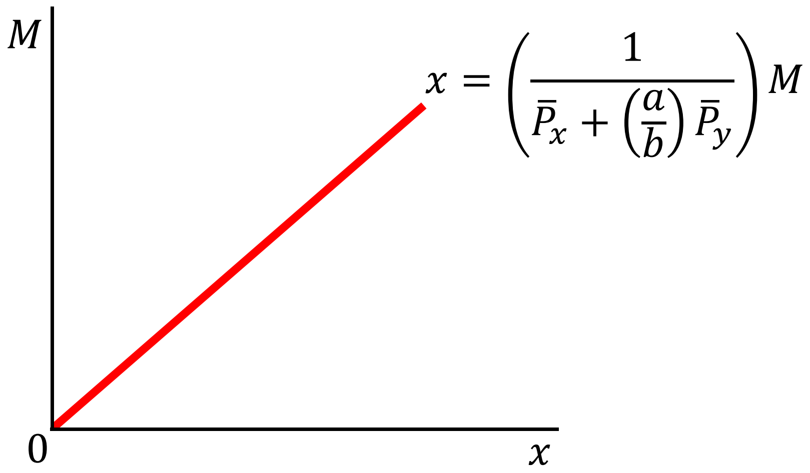


Şekil 30b: *x* malının Bireysel Talep Eğrisi

Tamamlayıcılık durumunda *x* malı için Engel Eğrisi :

$$x = \left(\frac{1}{\bar{P}_x + \left(\frac{a}{b}\right)\bar{P}_y}\right)M$$

$$\frac{\partial x}{\partial M} = \frac{1}{\bar{P}_x + \left(\frac{a}{b}\right)\bar{P}_y} > 0$$



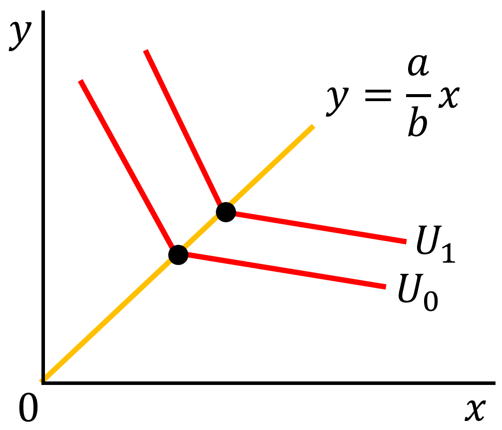
Şekil 31: *x* malı için Engel Eğrisi

3. Dirsek Oluşturan Kayıtsızlık Eğrisi

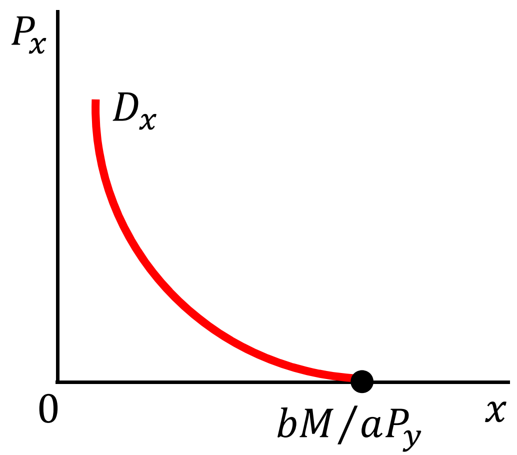
$$U = U(x, y) = \min\{a_1x + b_1y\,,\; a_2x + b_2y\}$$

$$M = xP_x + yP_y \qquad\qquad xP_x + \left(\frac{a}{b}x\right)P_y = M \;\rightarrow\; \boxed{x = \frac{M}{P_x + \left(\frac{a}{b}\right)P_y}}$$

$$ax = by \;\rightarrow\; y = \frac{a}{b}x$$



Şekil 32a : x ve y malları tamamlayıcıdır.



Şekil 32b: *x* malının Bireysel Talep Eğrisi

3. Dirsek Oluşturan Kayıtsızlık Eğrisi (Örnek)

$$U = U(x, y) = \min\{x + 2y\,,\ 2x + y\}$$

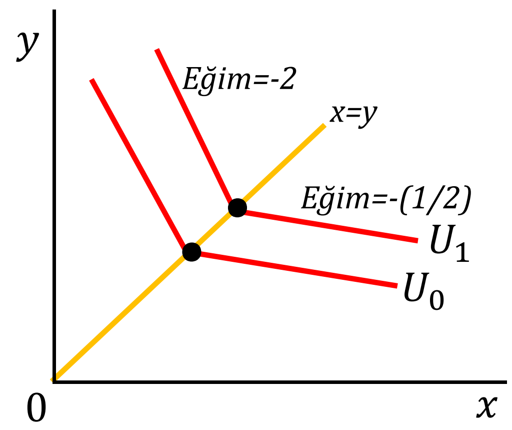
x malının talep eğrisinin belirlenmesinde üç olası durum söz konusudur:

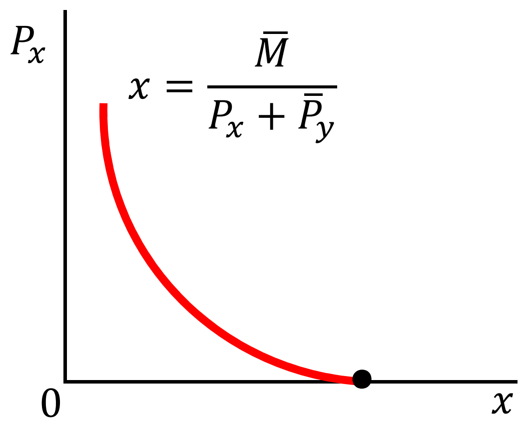
1. $\frac{1}{2} < \frac{P_x}{P_y} < 2$ ise, optimal çözüm dirsekli kayıtsızlık eğrisinin dirsek noktasında oluşur. Dirsek noktasında x ve y'nin eşit olmasını ve bütçe denklemini dikkate alarak x malının bireysel talep fonksiyonunu belirleyebiliriz.

$$x = y$$

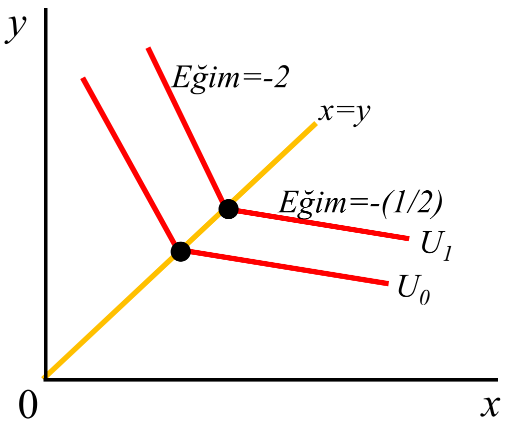
$$M = xP_x + yP_y$$

$$x = \frac{M}{P_x + P_y}$$

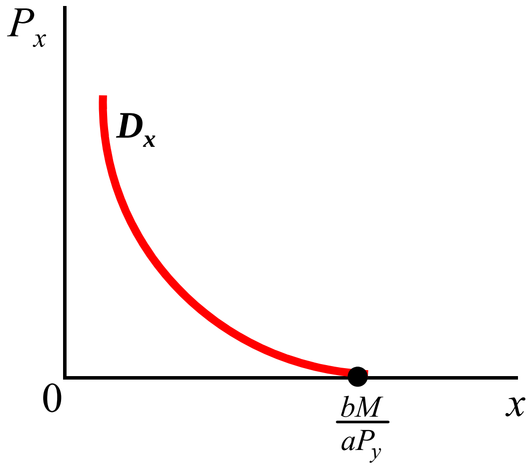




3. Dirsek Oluşturan Kayıtsızlık Eğrisi (Örnek devamı)



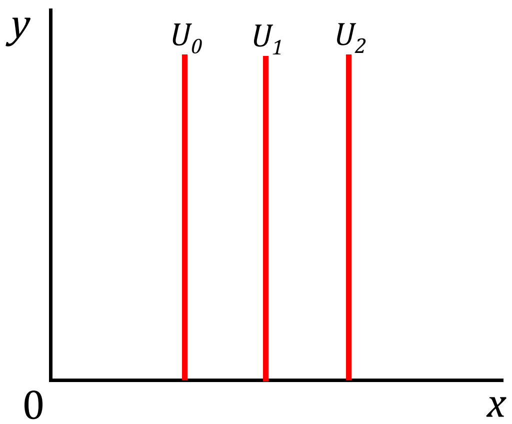
Şekil 33a : *x* ve *y* malları tamamlayıcıdır.



Şekil 33b: *x* malının Bireysel Talep Eğrisi

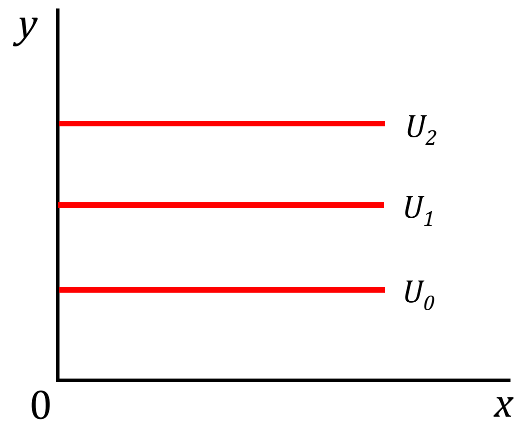
4. Bireyin Bir Mala Yansız Davrandığı Durumlar

Örneğin birey *x* malı kullanımına (seçimine) dikkat ederken, y malı kullanım miktarı onu ilgilendirmiyor. Yani *y* malının çok ya da az kullanımının, bireyin fayda düzeyi üzerinde bir etkisi yoktur. Bu durumda kayıtsızlık eğrisi, yatay eksene dik inen bir doğrudur (Şekil 34a). Birey *y* seçimine dikkat edip *x* malına yansız davranırsa, kayıtsızlık eğrisi yatay eksene paralel bir doğru olur (Şekil 34b).



Şekil 34a : Birey *y* malına karşı yansız

$$U_0 < U_1 < U_2$$

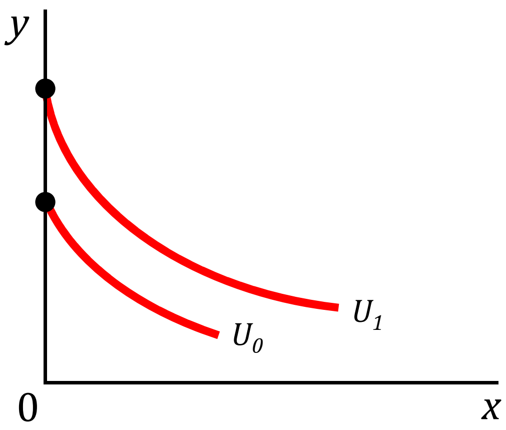


Şekil 34b : Birey *x* malına karşı yansız

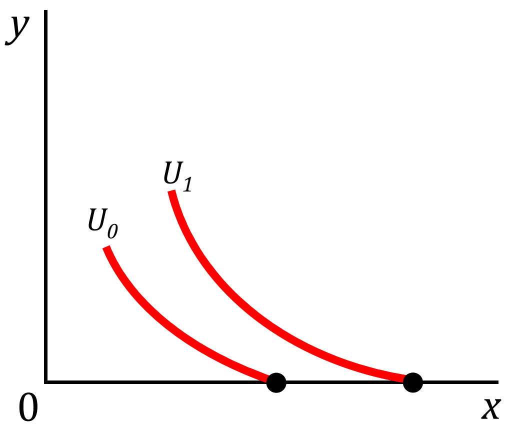
5. Doğrusalımsı (Quasilinear) Kayıtsızlık Eğrisi

$$U = U(x, y) = x + v(y)$$

Örnek: $U = x + \ln y$, $U = x + \sqrt{y}$



Şekil 35a : Doğrusalımsı Kayıtsızlık Eğrisi



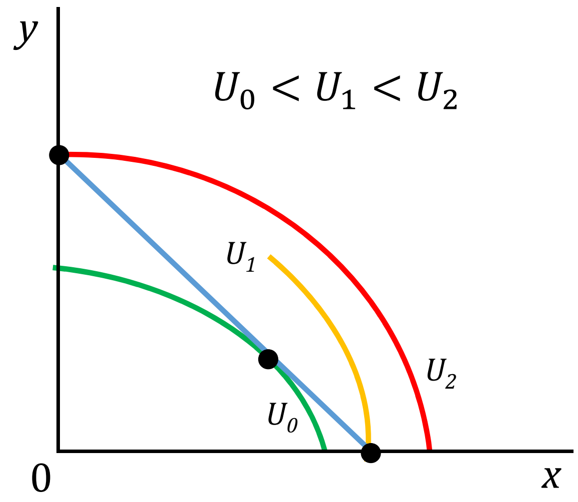
Şekil 35b : Doğrusalımsı Kayıtsızlık Eğrisi

5. İçbükey Kayıtsızlık Eğrisi

$$U = U(x,y) = x^2 + y^2$$

$$xP_x + yP_y = M$$

$$Z = \underset{\max}{\left(x^2 + y^2\right)} + \lambda\left(M - xP_x - yP_y\right)$$



Şekil 36. İçbükey

Birinci Sıra Koşul :

$$\frac{U_x}{U_y} = \frac{P_x}{P_y} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{y} = \frac{P_x}{P_y}$$

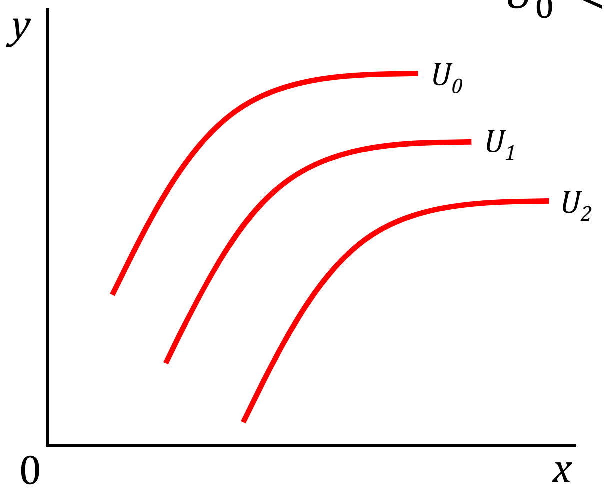
İkinci Sıra Koşul :

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -P_x \\ 0 & 2 & -P_y \\ -P_x & -P_y & 0 \end{vmatrix} = -2\left(P_x^2 + P_y^2\right) < 0 \ \ !$$

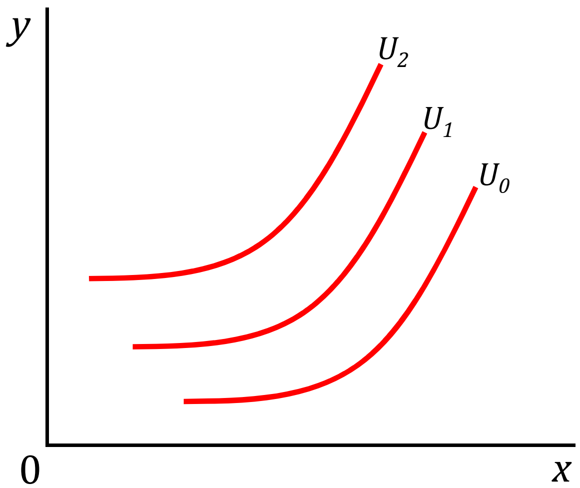
4. Bireyin Seçim Yaptığı Mallardan Birinin 'Kötü Mal' Olması

Örneğin birey için *x* malı sevilen (tercih edilen), *y* malı ise tercih edilmeyen (kötü) mal ise, kayıtsızlık eğrileri pozitif eğimli olur. Şekil 37a'da *x* malının iyi, *y* malının kötü; Şekil 37b'de *x* malının kötü, *y* malının iyi olduğu durumlar çizilmiştir.

$$U_0 < U_1 < U_2$$



Şekil 37a : x malı iyi, y malı kötü.



Şekil 37b : x malı kötü, y malı iyi.

4. Köşe Çözümü İçin Örnek

Şimdi iç bölge çözümü sağlamayan bir durumu dikkate alarak, köşe çözümünü nasıl elde edeceğimizi görelim. Bireye ilişkin fayda fonksiyonu, gelir düzeyi ve satın almak istediği x ve y mallarının fiyatları aşağıda verilmiştir. Fayda maksimizasyonu çözümü aşağıda yer almaktadır. Çözümdeki $x = 15, y = -2{,}5$ değerlerinin bir iç bölge çözümü vermediğine dikkat edelim.

$$U = U(x, y) = 10x + xy \ , \quad M = 10\,,\ P_x = 1\,,\ P_y = 2$$

$$\underset{\max}{Z} = (10x + xy) + \lambda(10 - x - 2y)$$

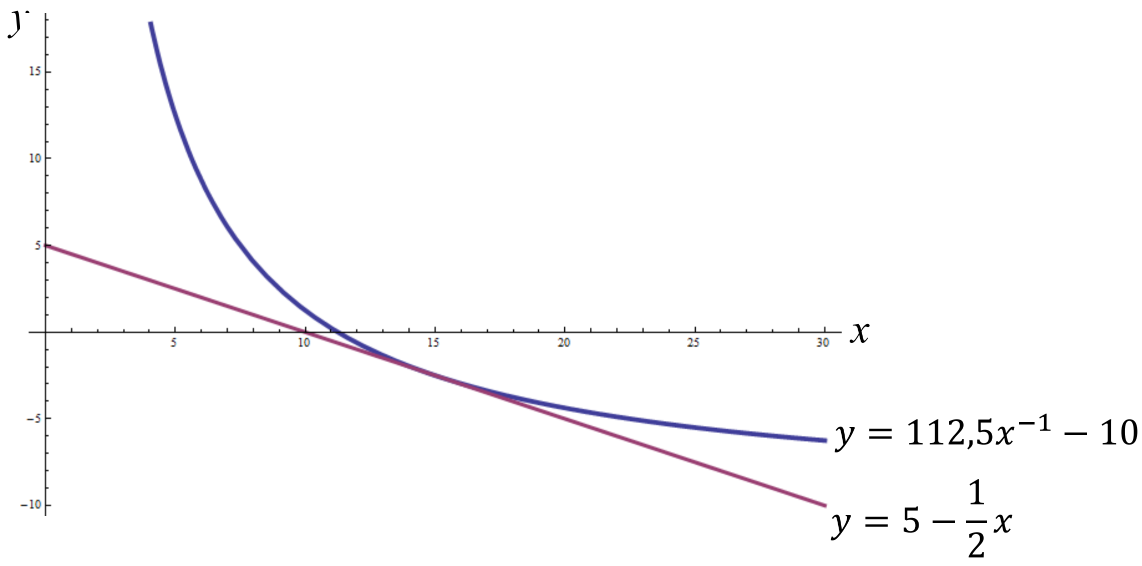
$$\left.\begin{aligned} Z_x &= 10 + y - \lambda = 0 \\ Z_y &= x - 2\lambda = 0 \end{aligned}\right\} \quad x^* = 15\,,\ y^* = -2{,}5\,,\ U_0 = 10x^* + x^*y^* = 112{,}5$$

$$Z_\lambda = 10 - x - 2y = 0$$

$$x_1 = 10\ ,\ y_1 = 0\ ,\ U_1 = 10x_1 + x_1y_1 = 100$$

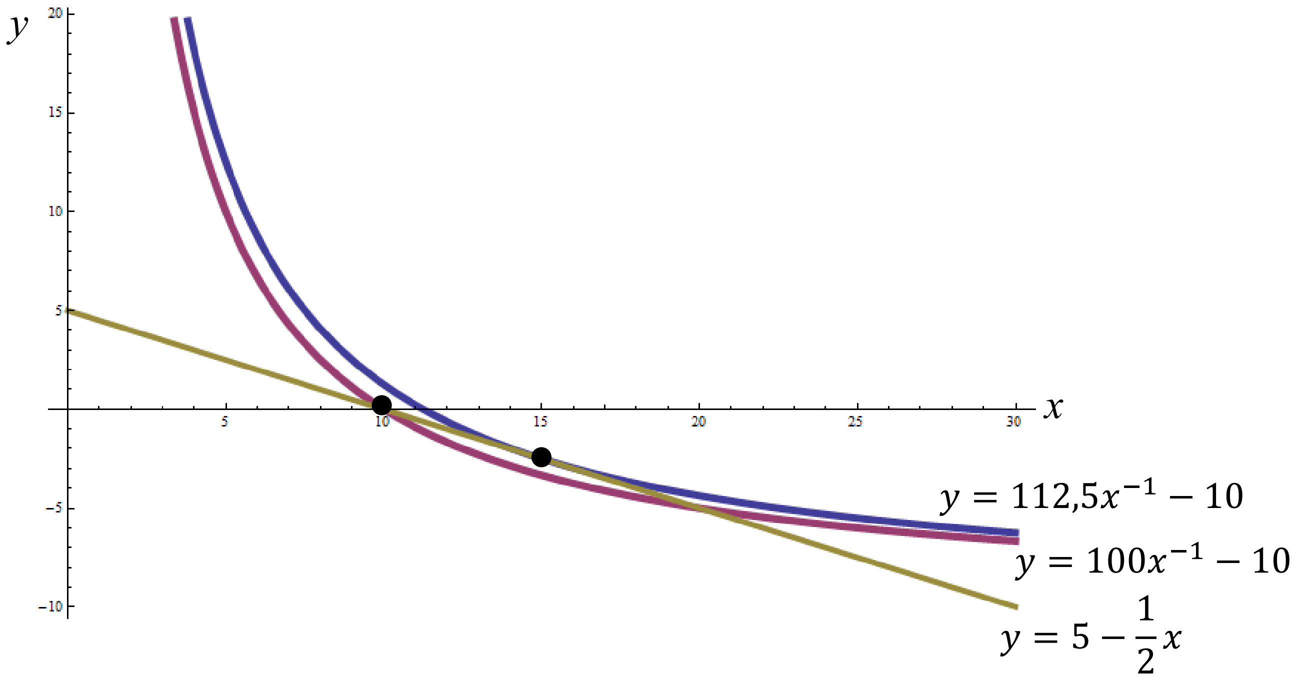
4. Köşe Çözümü İçin Örnek (devamı)

Optimal çözümün, pozitif x değerine karşılık, negatif (anlamsız) y değeri verdiği görülmektedir. Yani bir iç bölge çözümü oluşmamaktadır. Birey maksimum fayda düzeyine tüm gelirini yalnızca x'e harcayarak ulaşabilir. Yani çözüm x ekseni üzerinde bir köşe çözüm vermektedir.



4. Köşe Çözümü İçin Örnek (devamı)

Köşe çözümü $x = 10, y = 0$ seçimiyle gerçekleşmektedir. Bu durumda birey 100 birim fayda elde etmektedir.



Esneklik

Esnekliğin Tanımı:

$y = f(x)$ gibi bir fonksiyonda x ile y arasındaki esneklik, x'deki % değişmenin y'de yol açtığı % değişme ile ölçülmektedir.

$$\left. \varepsilon = \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} \quad \right\} \begin{array}{l} \dfrac{\Delta y}{y} \longrightarrow y\text{'deki \% değişme} \\[2ex] \dfrac{\Delta x}{x} \longrightarrow x\text{'deki \% değişme} \end{array}$$

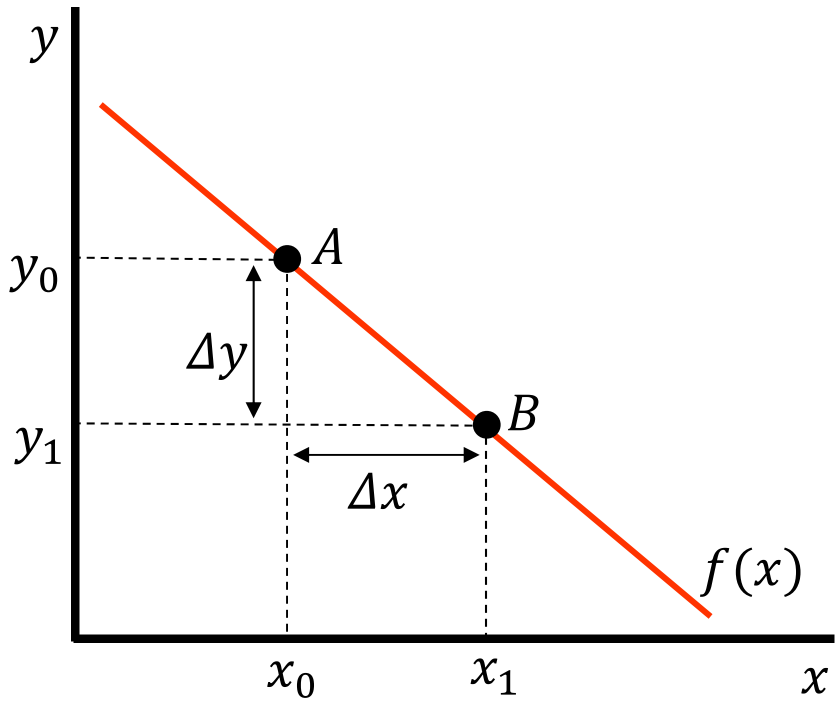
x'deki değişmeler (Δx) sonsuz küçüklükte olursa, bu ifade bir limit değere sahip olur. Böyle bir durumda, fonksiyonun belirli bir noktasındaki esnekliğini ölçmüş oluruz. Buna nokta esnekliği diyoruz.

$$\varepsilon = \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} \quad \rightarrow \quad \varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{x}{y} \quad \rightarrow \quad \varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{x}{y}$$

Fonksiyonun belirli bir noktası değil de aralığı için esnekliği, yay esnekliği ile belirleriz. Bunu hem matematik hem de grafik yoluyla görelim. Şekil 38'de, A-B aralığındaki esnekliği ölçüyoruz.

$$\varepsilon = \frac{\dfrac{\Delta y}{y_1 + y_2}}{\dfrac{\Delta x}{x_1 + x_2}} = \frac{\dfrac{y_1 - y_2}{y_1 + y_2}}{\dfrac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}}$$

Şekil 38. Yay Esnekliği



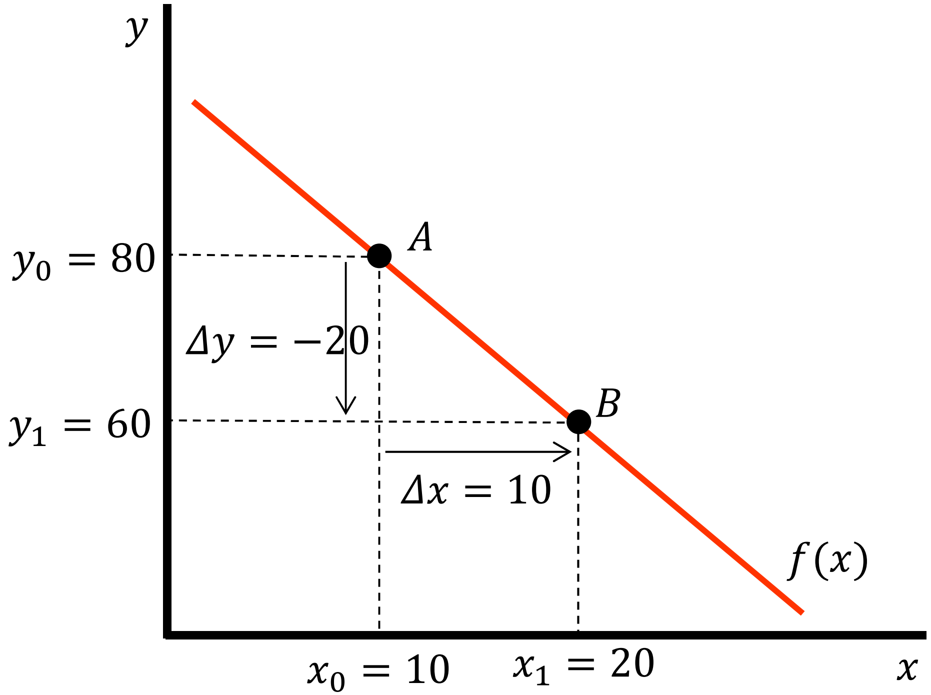
Şimdi yay esnekliğine sayısal bir örnek verelim. Bu örnek aynı zamanda Şekil 39'da da gösterilmiştir.

$$y = f(x) = 100 - 2x$$

$$y_1 = 100 - 2x_1 \quad \rightarrow \quad x_1 = 10 \;, \quad y_1 = 80$$

$$y_2 = 100 - 2x_2 \quad \rightarrow \quad x_2 = 20 \;, \quad y_2 = 60$$

$$\varepsilon = \frac{\dfrac{\Delta y}{y_1 + y_2}}{\dfrac{\Delta x}{x_1 + x_2}} = \frac{\dfrac{y_1 - y_2}{y_1 + y_2}}{\dfrac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}} = \frac{\dfrac{80 - 60}{80 + 60}}{\dfrac{10 - 20}{10 + 20}} = -0.429$$



Şekil 39.

Aynı örneği kullanarak nokta esnekliğini A ve B noktaları için ayrı ayrı hesaplayalım :

$$y = f(x) = 100 - 2x \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -2$$

$$\varepsilon = \frac{dy}{dx}\frac{x}{y}$$

$$\varepsilon = (-2)\frac{10}{80} = -0.25 \longrightarrow$$ A noktasındaki esneklik

$$\varepsilon = (-2)\frac{20}{60} = -0.67 \longrightarrow$$ B noktasındaki esneklik

Bir mala ilişkin talep denkleminin aşağıdaki gibi olduğunu varsayalım. Talebin fiyat, çapraz-fiyat ve gelir nokta esnekliklerini belirleyelim.

$$Q_x = aP_x^{\alpha} P_y^{\beta} M^{\theta}$$

Her iki tarafın doğal logaritmasını alalım ve her bir değişkene göre kısmi türevleri yazalım.

$$\ln Q_x = \ln a + \alpha \ln P_x + \beta \ln P_y + \theta \ln M$$

$$\frac{\partial \ln Q_x}{\partial \ln P_x} = \frac{\partial Q_x / Q_x}{\partial P_x / P_x} = \alpha \longrightarrow \text{Fiyat-Talep Esnekliği}$$

$$\frac{\partial \ln Q_x}{\partial \ln P_y} = \frac{\partial Q_x / Q_x}{\partial P_y / P_y} = \beta \longrightarrow \text{Çapraz Fiyat-Talep Esnekliği}$$

$$\frac{\partial \ln Q_x}{\partial \ln M} = \frac{\partial Q_x / Q_x}{\partial M / M} = \theta \longrightarrow \text{Gelir-Talep Esnekliği}$$

Yukarıdaki örneği sayısal olarak uygulayalım.

$$Q_x = aP_x^{-0.5}P_y^{1.4}M^{0.8}$$

Her iki tarafın doğal logaritmasını alalım ve her bir değişkene göre kısmi türevleri yazalım.

$$\ln Q_x = \ln a - 0.5\ln P_x + 1.4\ln P_y + 0.8\ln M$$

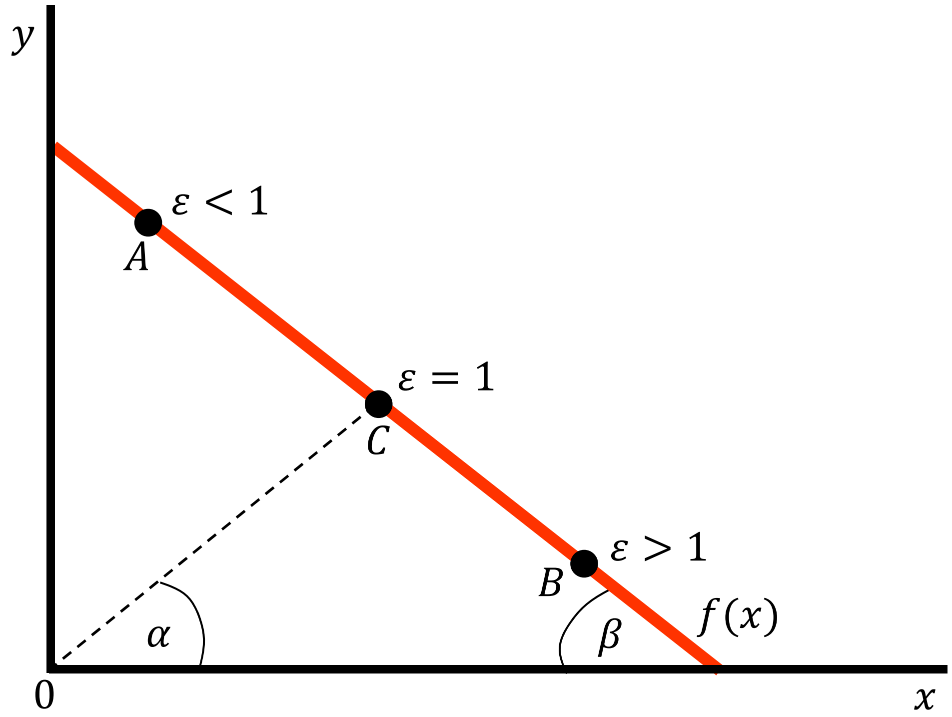
$$\frac{\partial \ln Q_x}{\partial \ln P_x} = \frac{\partial Q_x/Q_x}{\partial P_x/P_x} = \alpha = 0{,}5 \longrightarrow$$ Fiyat-Talep Esnekliği

$$\frac{\partial \ln Q_x}{\partial \ln P_y} = \frac{\partial Q_x/Q_x}{\partial P_y/P_y} = \beta = 1{,}4 \longrightarrow$$ Çapraz Fiyat-Talep Esnekliği

$$\frac{\partial \ln Q_x}{\partial \ln M} = \frac{\partial Q_x/Q_x}{\partial M/M} = \theta = 0{,}8 \longrightarrow$$ Gelir-Talep Esnekliği

Şekil 40'daki gibi doğrusal bir fonksiyonda esneklik her noktada farklıdır. Şeklin üst kısımlarına çıkıldıkça mutlak sayı olarak esnekliğini değeri küçülür.

$$\tan\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad , \quad \tan\alpha = \frac{y}{x} \quad \rightarrow \quad \varepsilon = \frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = \frac{\Delta y/\Delta x}{y/x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{x}{y}$$



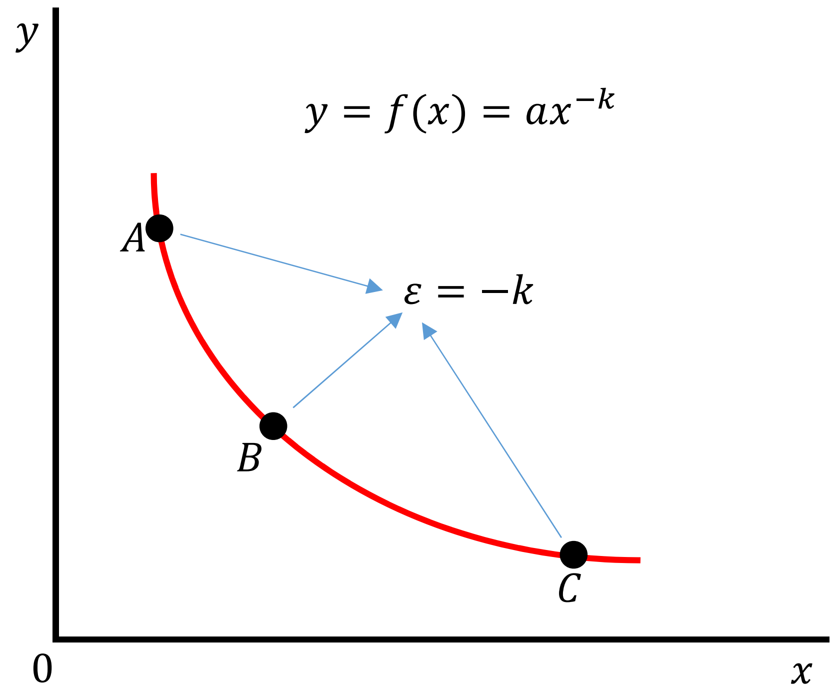
Şekil 40. Doğrusal Bir Fonksiyonda Esneklik

İkizkenar hiperbolik bir fonksiyonda esneklik, fonksiyonun her noktasında aynıdır. Bunu görebilmek için aşağıdaki matematiksel işlemleri yapalım.

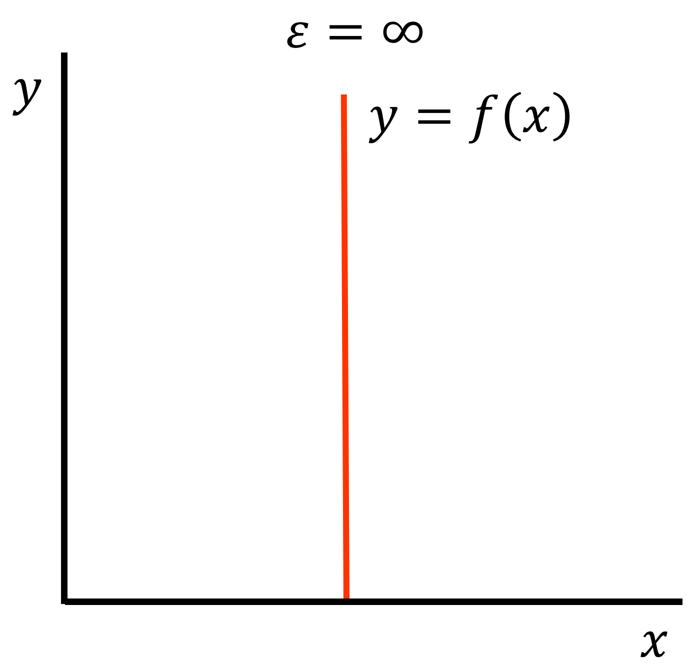
$$y = f(x) = ax^{-k} \quad \rightarrow \quad \ln y = \ln a + -k \ln x$$

$$\frac{\partial \ln y}{\partial \ln x} = \frac{\partial y / y}{\partial x / x} = \varepsilon = -k$$

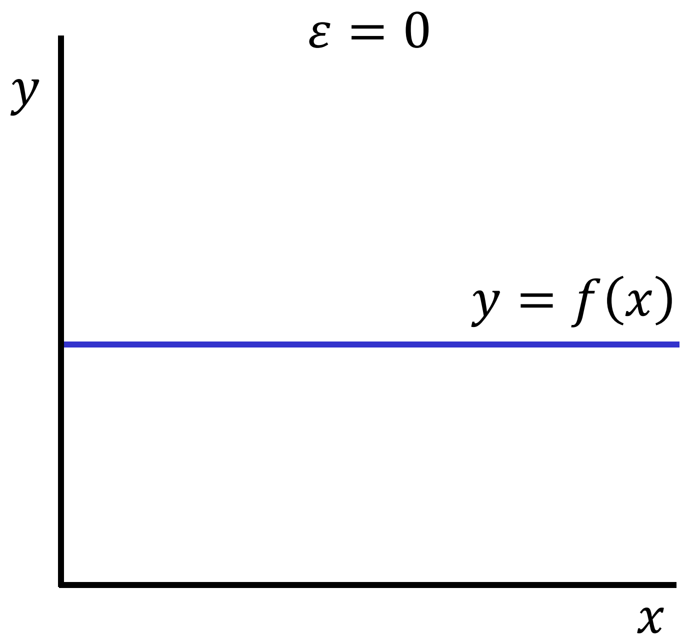
Şekil 41. İkizkenar Hiperbolik Bir Fonksiyonda Esneklik



Şekil 42. Değişik Esneklik Durumları

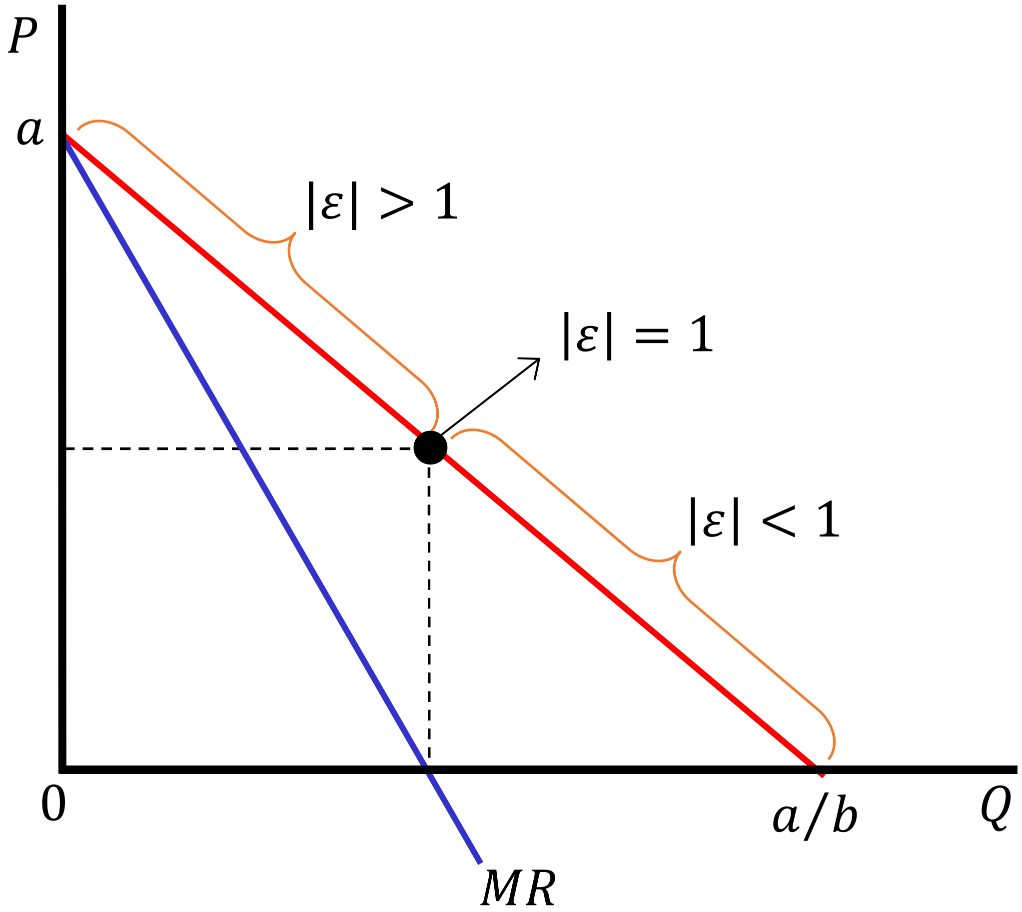


Tam Esneklik



Tam Katı Esneklik

Şekil 43. Negatif Eğimli Doğrusal Talep Denkleminde Esneklik



<u>Talep Denklemi</u>

$$P = a - bQ$$

<u>*MR* ile Esneklik İlişkisi</u>

$$MR = P\left(1 - \frac{1}{|\varepsilon|}\right)$$

$$0 < |\varepsilon| < 1 \rightarrow MR < 0$$

$$|\varepsilon| = 1 \rightarrow MR = 0$$

$$1 < |\varepsilon| \rightarrow MR > 0$$

Çok Dönemde Tüketim ve Faiz Olgusu

Tüketici gerçek yaşamda toplam tüketimini ve faydasını düzenlerken tek bir dönem içinde değil, yaşamının gelecek dönemlerini de dikkate alan bir davranışta bulunur. Yani toplam faydasını zamana yayar. Bu nedenle birey gelirinin tamamını o dönemde harcamayabilir ve gelecek dönemlere gelir aktarabilir (tasarruf) ya da tam tersine, bir borçlanma sürecine girebilir. Bu olguların analizi, bireyi birkaç dönemde hem tüketim hem de tasarruf (ya da borçlanma) davranışlarıyla karşılayan bir yaklaşım ile yapılabilir.

Çok dönemli tüketim analizini şu varsayımlara dayalı olarak yapalım:

- Tüketicinin ekonomik ufku iki dönemdir.
- Başlangıçta hiçbir parasal varlığa sahip değildir.
- İki dönem boyunca servet oluşturma isteği yoktur.
- Tüketici her bir dönemde elde edeceği geliri bilmektedir.

M_1, birinci dönemdeki geliri; M_2, ikinci dönemdeki geliri; C_1, birinci dönemdeki tüketim harcamaları; C_2 ikinci dönemdeki tüketim harcamaları; i, faiz oranıdır.

Tüketicinin birinci dönem gelirinin tamamını harcamayabileceğini, E_1 kadar bir tasarruf yapmak isteyebileceğini varsayıyoruz.

$$E_1 = (M_1 - C_1)$$

Tüketici bu tasarrufunu i faiz oranından finansal piyasaya ödünç olarak verirse, ikinci yılda şu kadar faiz geliri elde eder:

$$i\,(M_1 - C_1)$$

Bireyin ikinci yılda harcayacağı toplam geliri de şöyle olur:

$$(M_1 - C_1) + i\,(M_1 - C_1) + M_2$$

Her iki dönemdeki toplam gelir ve toplam harcamasının eşit olması gerekeceğinden;

$$\underbrace{M_1 + M_2 + i\,(M_1 - C_1)}_{\text{toplam gelir}} = \underbrace{C_1 + C_2}_{\text{toplam tüketim}}$$

Bu eşitliği düzenlersek, şu biçime dönüşür:

$$C_2 = M_1(1+i) + M_2 - C_1(1+i)$$

Birey her iki dönemdeki gelirinin tümünü birinci dönemde harcarsa ($C_2 = 0$), birinci dönem tüketimi:

$$C_1 = M_1 + \frac{1}{(1+i)}M_2$$

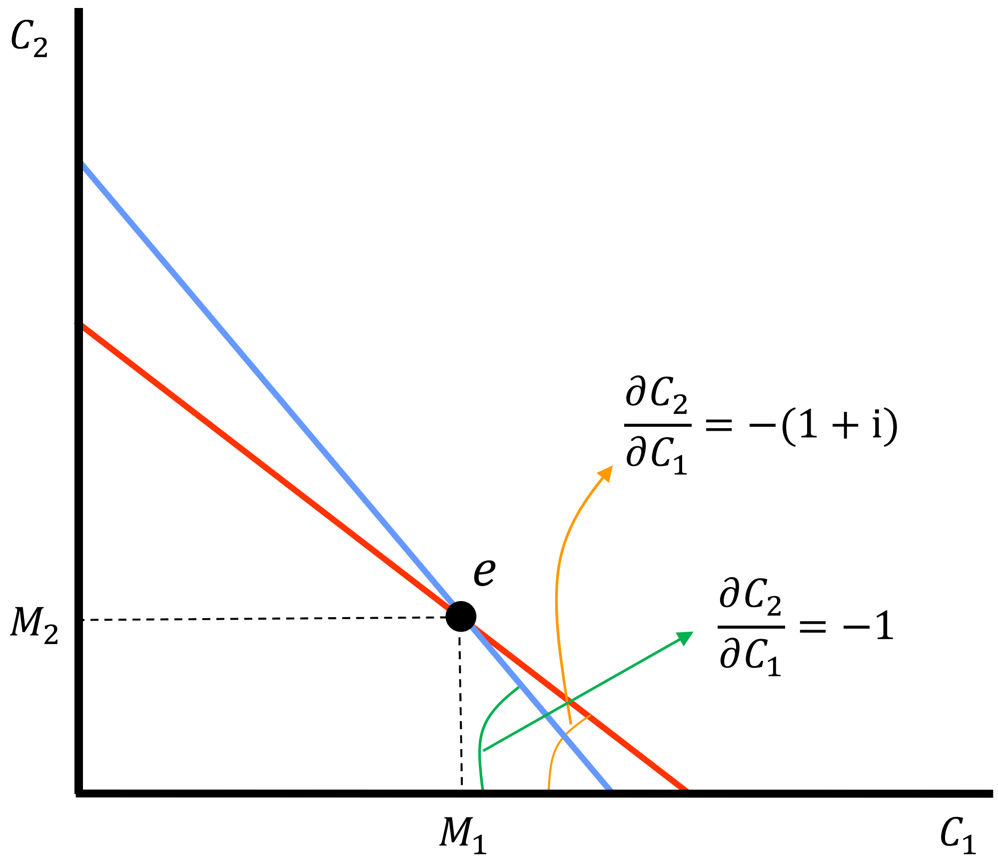
Birey her iki dönemdeki gelirinin tümünü ikinci dönemde harcarsa ($C_1 = 0$), ikinci dönem tüketimi:

$$C_2 = M_1(1+i) + M_2$$

Bu iki olası uç durumu Şekil 44 ile gösterebiliriz. Her iki eksene de işaretlediğimizde ve iki noktayı birleştirdiğimizde elde edeceğimiz doğruya, çok dönemli bütçe doğrusu diyoruz. Çok dönemli bütçe doğrusunun eğimi de, yukarıdaki iki değerin oranına (C_2/C_1) eşittir.

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{M_1(1+i) + M_2}{M_1 + \frac{1}{(1+i)}M_2}$$

Şekil 44. Çok Dönemli Bütçe Doğrusu



Faiz oranı sıfır ($i = 0$) olduğunda zaman bütçe doğrusunun eğimi:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{M_1 + M_2}{M_1 + M_2} = 1$$

Benzer şekilde, bütçe doğrusunun eğimini belirleyebilmek için, C_2'nin C_1'e göre türevini alabiliriz.

$$C_2 = M_1(1 + i) + M_2 - C_1(1 + i)$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial C_1} = -(1 + i)$$

Faiz oranı yükseldikçe, zaman bütçe doğrusu giderek dikleşen bir görüntü verecektir (Şekil 45). Ancak tüm doğrular, e noktasından geçecek şekilde hareket ederler. Faiz oranı değişik değerler aldığında, zaman bütçe doğrusunun ne şekilde hareket ettiğini aşağıda hesaplayalım.

$$C_2 = M_1(1+i) + M_2 - C_1(1+i)$$

$i = 0$ durumu:

$$C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 100(1+0) + 50 - 0(1+0) \quad \Rightarrow \quad C_2 = 150$$

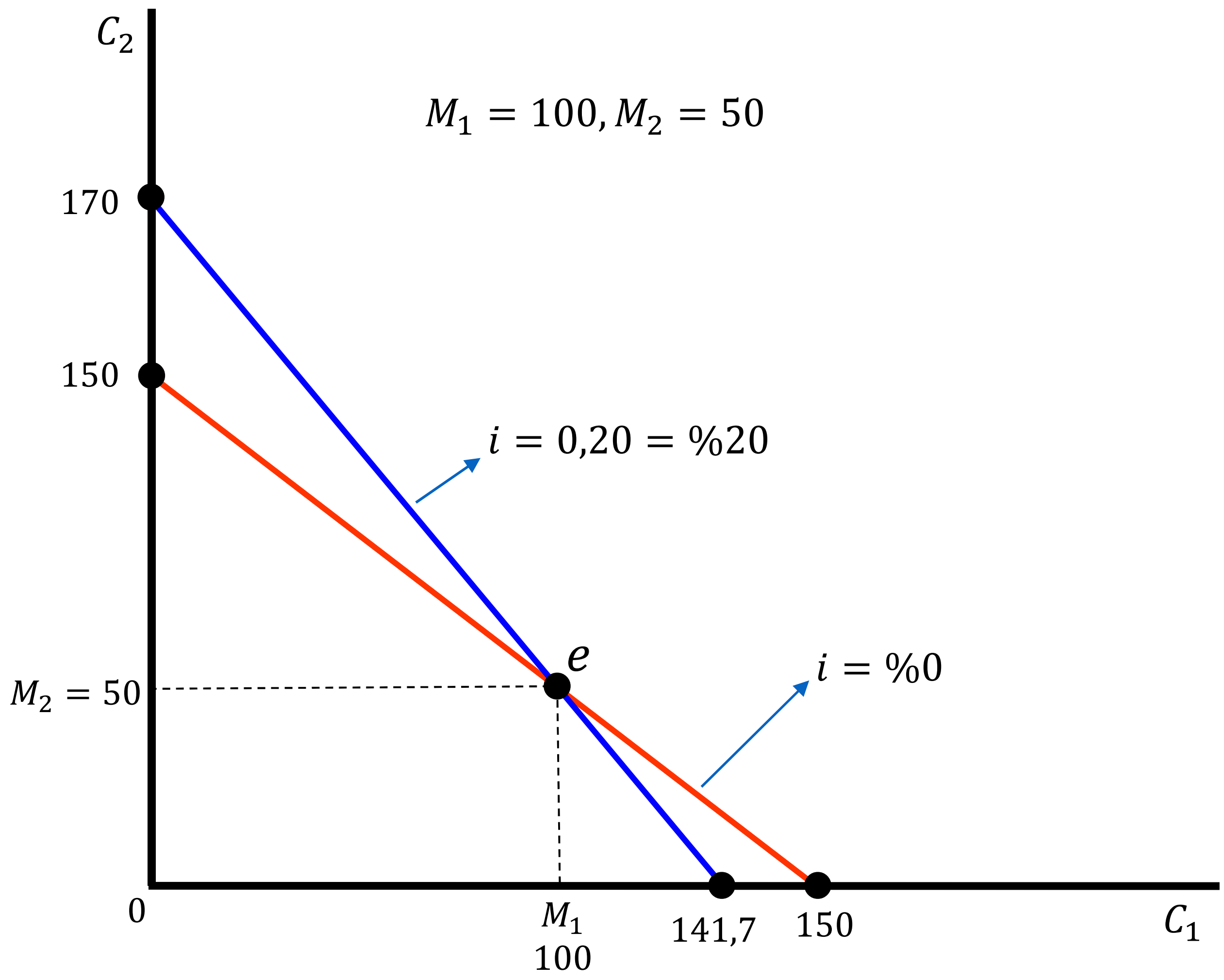
$$C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 100(1+0) + 50 - C_1(1+0) \quad \Rightarrow \quad C_1 = 150$$

$i = 0{,}20$ durumu:

$$C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 100(1+0.2) + 50 - 0(1+0.2) \quad \Rightarrow \quad C_2 = 170$$

$$C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 100(1+0.2) + 50 - C_1(1+0.2) \quad \Rightarrow \quad C_1 = 141.7$$

Şekil 45. Farklı Faiz Oranlarında Zaman Bütçe Doğrusunun Değişimi



Zamana yayılan gelir ve tüketim dikkate alındığında, fayda maksimizasyonu iki aşamada çözümlenebilir :

- Birinci aşamada, tüketicinin toplam harcamalarını zaman içinde olası maksimum faydayı sağlayacak şekilde dönemlerarasında nasıl dağıttığının araştırılması.

- İkinci aşamada, tüketicinin her dönem içerisinde, önceden belirlenen tüketim harcamaları tutarını, olası en yüksek faydayı sağlayacak şekilde çeşitli mallar arasında nasıl dağıttığının araştırılması.

Her dönemin bütçe denklemini oluşturabilmek için gerekli harcanabilir gelir tutarının belirlenmesi birinci aşamada gerçekleşmektedir. Dolayısıyla her dönemde yapılacak harcamanın düzeyi belirlendikten sonra, bu harcamanın mallar arasındaki dağılımının belirlenmesi ikinci aşamada yapılabilir.

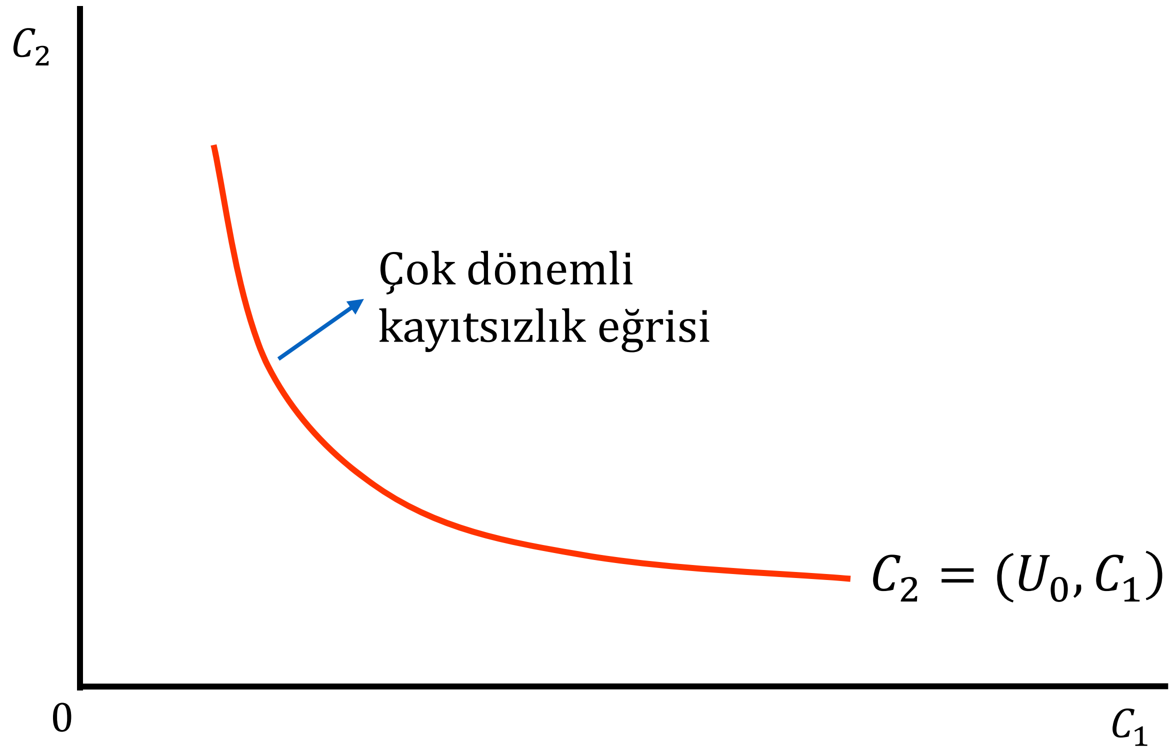
İki dönemli analizi sürdürelim ve fiyatların değişmediğini varsayalım. Bireyin her iki dönemdeki tüketimden sağladığı toplam fayda :

$$U = U(C_1, C_2)$$

Bu fonksiyon sürekli varsayıldığından, U fayda düzeyi sonsuz sayıdaki (C_1, C_2) bileşiminden oluşabilir. Tüm bu bileşimlerin oluşturduğu eğriye ***çok dönemli kayıtsızlık eğrisi*** denilmektedir (Şekil 46). C_1'deki her azalış, C_1'deki artışla giderilecektir. Yani dönem tüketimleri ikamedir. Çok dönemli kayıtsızlık eğrisinin eğimi, dC_2/dC_1'dir.

Çok dönemli kayıtsızlık eğrisi denklemini, çok dönemli toplam fayda fonksiyonundan türetiriz.

Şekil 46. Çok Dönemli Kayıtsızlık Eğrisi



İktisat bilimindeki neoklasik yaklaşıma göre, tüketiciler genellikle bugünkü tüketimi (C_1), gelecek dönemdeki tüketime (C_2) tercih etmektedir. Bu nedenle, tüketicinin bir *dönem tercihi* oluşmaktadır. Bugünkü tüketim tercihi şiddetlendikçe, tüketicinin toplam fayda düzeyini sabit tutabilmek için, C_1 tüketimindeki azalışı karşılayacak C_2 tüketim artışının daha fazla olması gerekir. Negatif eğimli ve dışbükey kayıtsızlık eğrisi, birinci ve ikinci dönem tüketimleri arasındaki ikamenin bu şekilde gerçekleşeceğini göstermektedir.

C_1 tüketim harcaması düşük düzeylerde bulundukça, C_2'nin zaman içinde C_1'i ikame etmesi giderek zorlaşacaktır. C_1 arttıkça temel gereksinimler giderildiğinden, tüketici tasarrufu düşünmeye başlayacaktır. Dolayısıyla C_2, C_1'i daha rahat ikame edebilecektir. Yani dC_2/dC_1 eğimi mutlak değer olarak küçülecektir.

Örneğin C_2'nin C_1'i ikame oranı 1,10 ise, C_1'deki her bir birimlik azalışın, C_2'de 1,10 birimlik artışla giderilmesi gerekmektedir. Diğer bir ifadeyle tüketici birinci dönemdeki bir birimlik harcamasını ikinci döneme devretmeyi kabul etmek için 0,10 birimlik prim istemektedir. Bu prim, *tüketicinin dönem tercih oranı* (t) olarak tanımlanmaktadır.

$$t = -\frac{\partial C_2}{\partial C_1} - 1$$

Dikkat edilirse bu oran (t), faiz oranına (i) eşittir.

$$\frac{\partial C_2}{\partial C_1} = -(1 + i) \quad \rightarrow \quad i = -\frac{\partial C_2}{\partial C_1} - 1 = t$$

Zaman içinde fayda fonksiyonunun maksimizasyonu sorunu, bütçe denklemine uyarak, yani gelirler ile harcamalar arasındaki eşitlik koşulunu sağlayarak, toplam tüketim harcamalarını çeşitli dönemler arasında paylaştırmayı amaçlamaktadır.

Amaç Fonksiyonu: $U = U(C_1, C_2)$

Kısıt Fonksiyonu: $M_1(1+i) + M_2 = C_1(1+i) + C_2$

$$(M_1 - C_1)(1+i) + (M_2 - C_2) = 0$$

Optimal tüketimi belirleyebilmek için kısıtlı maksimizasyon probleminin çözümünde kullanılan Lagrange fonksiyonunu oluşturmalıyız.

$$Z = U(C_1, C_2) + \lambda[(M_1 - C_1)(1+i) + (M_2 - C_2)]$$

Bunu C_1, C_2 ve λ için, birinci sıra koşulları sağlayacak şekilde çözelim.

$$\frac{\partial Z}{\partial C_1} = \frac{\partial U}{\partial C_1} - \lambda(1+i) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{\partial U/\partial C_1}{(1+i)}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial C_2} = \frac{\partial U}{\partial C_2} - \lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{\partial U}{\partial C_2}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = (M_1 - C_1)(1+i) + (M_2 - C_2) = 0$$

$$\frac{\partial U/\partial C_1}{\partial U/\partial C_2} = (1+i) \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial U}{\partial C_1} = (1+i)\frac{\partial U}{\partial C_2}}$$

→ Bireyin çok dönemli optimal harcama ve tasarruf kuralı

$$MRS_{C_1C_2} = \frac{\partial U/\partial C_1}{\partial U/\partial C_2}$$

→ Dönemlerarası marjinal ikame oranı

Şimdi problemi sayısal olarak ele alalım. Daha önce Cobb-Douglas fayda fonksiyonunu kullanmıştık. Daha önce kullandığımız yöntemi kullanarak, önce simgesel çözümü elde edelim, ardından sayısal değerleri probleme uygulayalım.

Çok dönemli fayda fonksiyonu: $U = U(C_1, C_2) = C_1^{\alpha} C_2^{\beta}$, $\quad \alpha, \beta > 0$

Bütçe Kısıtı: $(M_1 - C_1)(1+i) + (M_2 - C_2) = 0$ ya da $M_1(1+i) + M_2 - C_1(1+i) - C_2$

Lagrange fonksiyonu: $Z = U(C_1, C_2) + \lambda[M_1(1+i) + M_2 - C_1(1+i) - C_2]$

Birey, veri faiz oranı (i) ve parasal gelirler (M_1, M_2) dikkate alındığında, yaşamı boyu ne ölçüde tüketim ve ilk dönem (örneğin çalışma çağı ya da gençlik yılları) tasarruf (belki de borçlanma) yapacaktır. Yukarıdaki Lagrange probleminin çözümü bunu sağlayacaktır. Problemde üç bilinmeyenimiz vardır: C_1, C_2, λ.

Şimdi Lagrange fonksiyonunda C_1, C_2 ve λ'ya göre birinci sıra kısmi türevleri alalım, sıfıra eşitleyerek C_1, C_2 ve λ için çözelim :

$$Z = U(C_1, C_2) + \lambda[M_1(1+i) + M_2 - C_1(1+i) - C_2]$$

$$Z = C_1^{\alpha} C_2^{\beta} + \lambda[M_1(1+i) + M_2 - C_1(1+i) - C_2]$$

$$\frac{\partial Z}{\partial C_1} = \alpha C_1^{\alpha-1} C_2^{\beta} - \lambda(1+i) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{\alpha C_1^{\alpha-1} C_2^{\beta}}{(1+i)}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial C_2} = \beta C_1^{\alpha} C_2^{\beta-1} - \lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \beta C_1^{\alpha} C_2^{\beta-1}$$

$$\boxed{C_2 = \frac{\beta}{\alpha}(1+i)C_1}$$

Bireyin çok dönemli optimal harcama ve tasarruf kuralı

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = M_1(1+i) + M_2 - C_1(1+i) - C_2 = 0$$

$$MRS_{C_1C_2} = \frac{\alpha C_2}{\beta C_1} = 1 + i$$

Neoklasik teoriye göre bireyler tüketimde sabırsız olduğundan (α'nın β'dan daha büyük değer alması), Cobb-Douglas tipi çok dönemli fayda fonksiyonundan hareketle elde ettiğimiz optimal harcama kuralı, bireyin birinci dönem tüketimden vazgeçmesi için faiz oranının yükselmesi gerektiğini söylemektedir. Çok dönemli optimal harcama kuralını birinci sıra koşulun son denkleminde yerine yazar ve düzenlersek, birinci ve ardından ikinci dönem tüketim fonksiyonlarını elde etmiş oluruz.

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = M_1(1+i) + M_2 - C_1(1+i) - \frac{\beta}{\alpha}(1+i)C_1 = 0$$

$$\boxed{C_1 = \frac{1}{\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)}\left[M_1 + \frac{M_2}{(1+i)}\right]}$$

$$C_2 = \frac{\beta}{\alpha}(1+i)C_1$$

$$\boxed{C_2 = \frac{1}{\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)}\left[M_1(1+i) + M_2\right]}$$

Gelir ve faiz oranındaki değişimlerin dönemsel tüketim üzerine etkilerine bakalım.

$$\frac{\partial C_1}{\partial M_1} = \frac{1}{\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)} > 0 \qquad \frac{\partial C_1}{\partial M_2} = \frac{1}{\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)(1+i)} > 0 \qquad \frac{\partial C_1}{\partial i} = -\frac{M_2}{(1+i)^2} < 0$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial M_1} = \frac{(1+i)}{\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)} > 0 \qquad \frac{\partial C_2}{\partial M_2} = \frac{1}{\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)} > 0 \qquad \frac{\partial C_2}{\partial i} = \frac{M_1}{\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)} > 0$$

Gelir artışları her iki dönem tüketimi de artırıcı etkiler yaratmaktadır. Ancak faiz oranındaki artışlar birinci dönem tüketimi azaltıcı, ikinci dönem tüketimi artırıcı etkilere neden olmaktadır. Faiz oranları yükselince, elde edilecek faiz geliri (dönem tercih oranının yükselmesi), dönemlerarası marjinal ikame oranına baskın çıkmakta, birey yeniden rasyonel tüketim tercihi ayarlaması yaparken birinci dönem tüketimi azaltmakta, yani tasarrufları artırarak sermaye piyasasına daha çok kaynak aktarmaktadır.

$$MRS_{C_1C_2} = \frac{\alpha C_2 \uparrow}{\beta C_1 \downarrow} < 1 + i \quad \rightarrow \quad MRS_{C_1C_2} = \frac{\alpha C_2}{\beta C_1} = 1 + i$$

Dönemsel parasal gelirler ve faiz oranı sabitken, öznel tercih oranının (α/β) artması durumunda, bireyin tüketimdeki sabırsızlık düzeyi yükseleceğinden, birinci dönem tüketimi yükselir, tasarruf düşer.

$$\frac{\partial C_1}{\partial(\beta/\alpha)} = \frac{-\left[M_1 + \frac{M_2}{(1+i)}\right]}{\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)^2} < 0$$

Çok dönemli Cobb-Douglas fayda fonksiyonundan, çok dönemli kayıtsızlık eğrisini elde edelim.

$$U_1 = C_1^{\alpha} C_2^{\beta} \quad \rightarrow \quad C_2 = U_1^{1/\beta} C_1^{-\alpha/\beta}$$

Şimdi aşağıdaki veri koşulları dikkate alarak bu uygulamayı sayısal olarak belirleyelim.

$$\alpha = 0{,}8, \beta = 0{,}5, i = 0{,}15, M_1 = 2000, M_2 = 1000$$

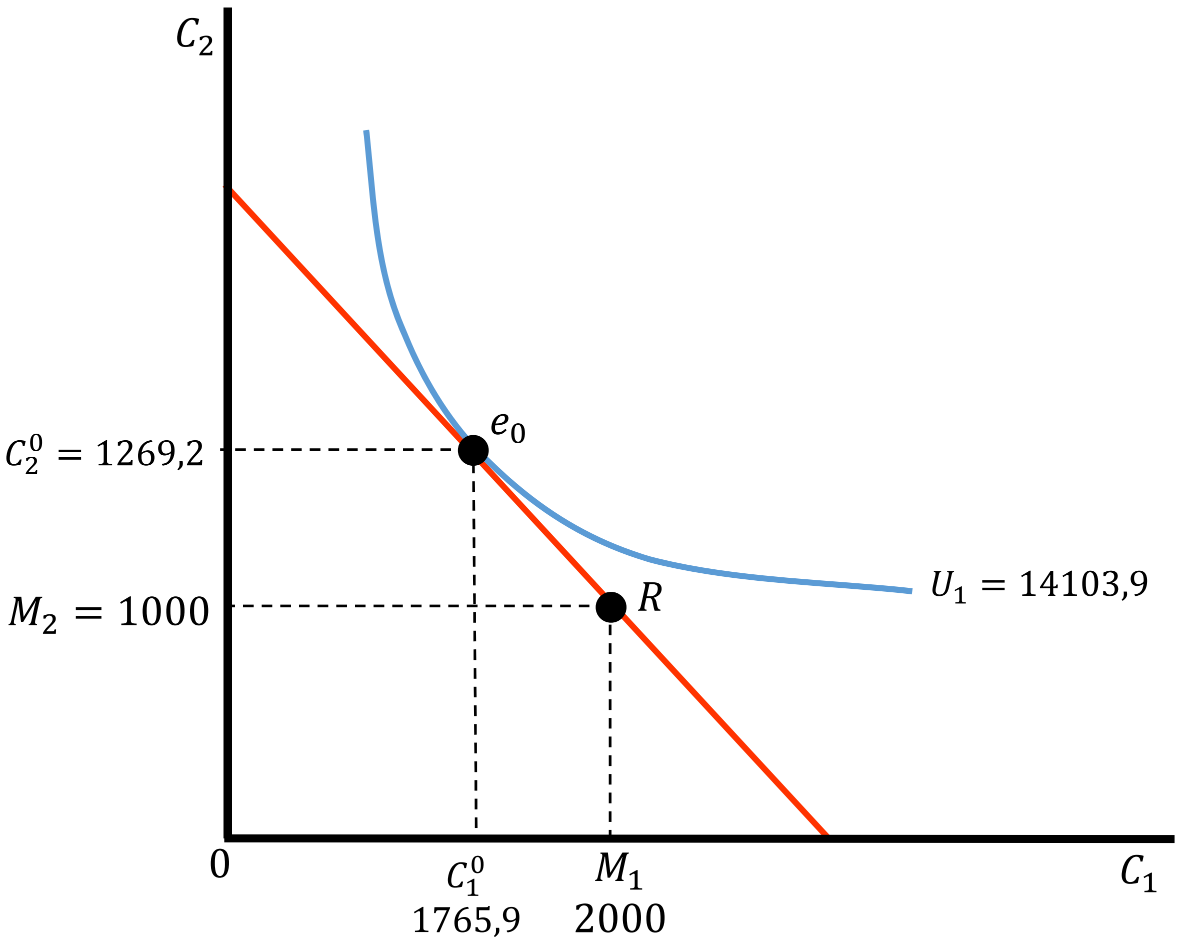
Birey için bu veri koşulları dikkate aldığımızda, bireyin her bir dönemdeki optimal tüketim, tasarruf (borçlanma) miktarlarını belirleyebiliriz. Bu uygulamada elde edilen sonuçlara, çok dönemli Cobb-Douglas fayda fonksiyonu dikkate alınarak ulaşılmıştır. Toplam fayda fonksiyonu değiştikçe, bu sonuçların da değişeceğine dikkat ediniz.

$$C_1 = \frac{1}{\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)}\left[M_1 + \frac{M_2}{(1+i)}\right] \quad \rightarrow \quad C_1^0 = 1765{,}9$$

$$C_2 = \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right)}[M_1(1+i) + M_2] \quad \rightarrow \quad C_2^0 = 1269{,}2$$

Şekil 46, sayısal uygulamayı grafik olarak göstermektedir.

Şekil 46. İki Dönemli Tüketimde Denge



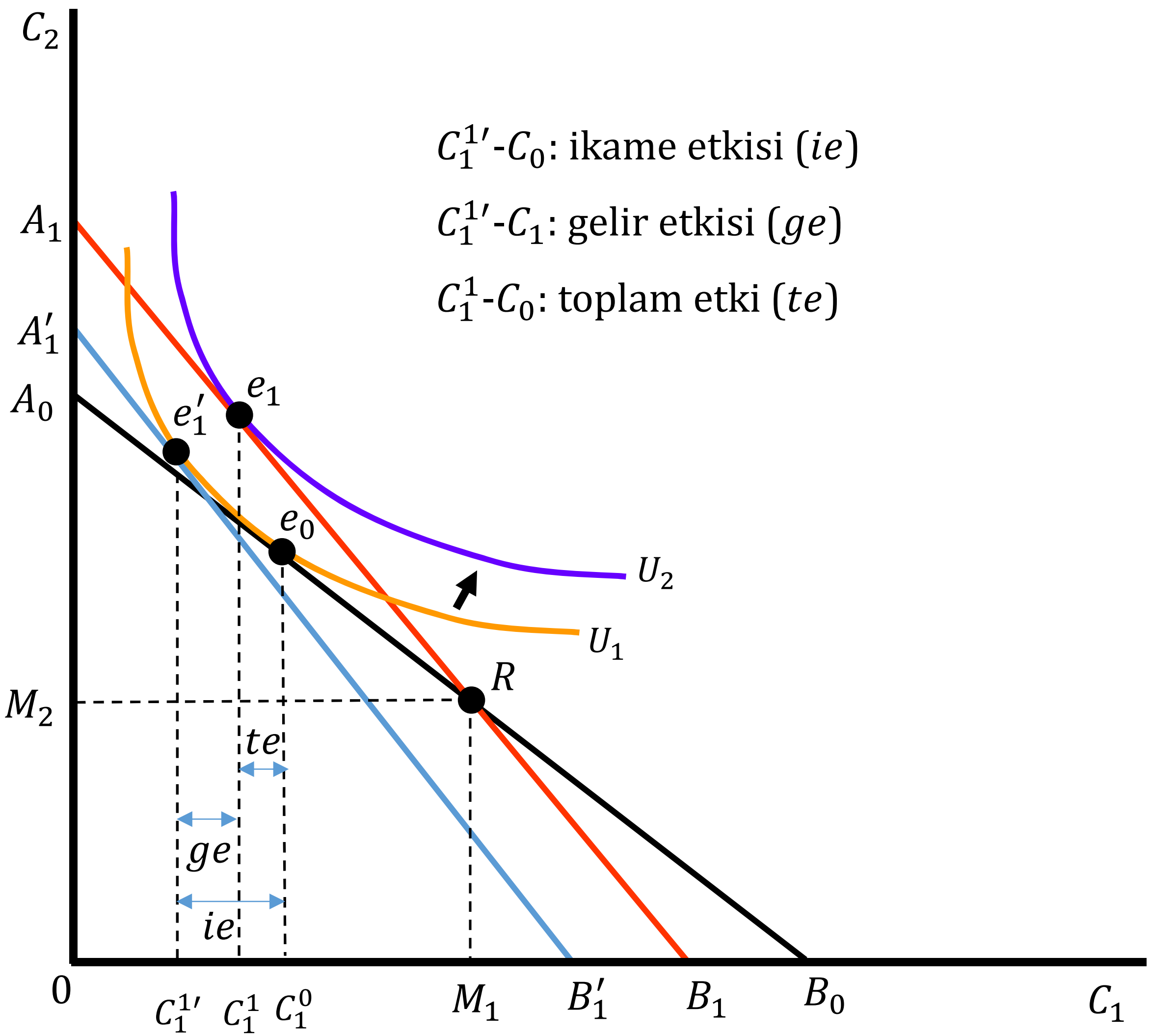
Faiz oranındaki değişme, tüketicinin dönemlerarası optimum tüketim tercihini (dengesini) iki şekilde etkiler:

- ikame etkisi (ie)
- gelir etkisi (ge)

Örneğin faiz oranı yükselirse, tüketici birinci dönemde daha fazla tasarruf yapmak için, C_1'i azaltır, C_2'yi artırır. Yani bir ikame etkisi ortaya çıkar. Bu durum, başlangıçtaki kayıtsızlık eğrisinin, yeni çok dönemli bütçe doğrusuna teğet olduğu yeni bir denge noktası tanımlar. Birey faiz oranı değişmeden önce e_0 denge noktasına karşılık gelen C_1^0 ve C_1^0 tüketimini tercih etmektedir. Başlangıçtaki çok dönemli bütçe doğrusu A_0B_0, çok dönemli kayıtsızlık eğrisi de U_1'dir. Faiz oranı yükseldiğinde, çok dönemli bütçe doğrusu saatle aynı yönde ve R noktası sabit kalmak üzere hareket eder. Yeni çok dönemli bütçe doğrusu A_1B_1'dir. Faiz oranının yükselmesi, bireyin parasal gelirini de yükselteceğinden, bireyin yaşam boyu tüketim düzeyleri yükselir, yani yeni refah düzeyi daha yüksekte yer alan bir kayıtsızlık eğrisince tanımlanır (U_2) (Şekil 47).

Şekil 47. İki Dönemli Tüketimde İkame ve Gelir Etkileri

Faiz oranı yükseliyor



$C_1^0 - C_1^1$ aralığı, faiz oranı yükselmesinin birinci dönem tüketimi üzerinde neden olduğu toplam tüketim etkisini (te) göstermektedir (Şekil 47). Toplam etkiyi ikame etkisi (ie) ve gelir etkisi (ge) olarak ikiye ayırabilmek için, yeni çok dönemli bütçe doğrusuna (A_1B_1) paralel, ancak başlangıçtaki kayıtsızlık eğrisine (U_1) teğet olan bir bütçe doğrusu ($A_1'B_1'$) tanımlarız. Teğet noktasına (e_1') karşılık gelen tüketim düzeyi, birinci dönemin Hicksgil tüketim düzeyidir ($C_1^{1\prime}$). Bu yöntemle, faiz oranının neden olduğu birinci dönemdeki toplam değişim ie ve ge olarak ikiye ayrıştırılmıştır.

$C_1^{1\prime}$-C_0: ikame etkisi (ie)

$C_1^{1\prime}$-C_1: gelir etkisi (ge)

C_1^1-C_0: toplam etki (te)

Bu ayrıştırma, hükümet tarafından uygulanacak bir iktisat politikasının (örneğin vergi politikasının (gelir vergisi, faiz geliri üzerinden alınan vergi)) etkilerini görebilme olanağı sağlayacaktır.

ie ve ge'yi Cobb-Douglas toplam (yaşam boyu) fayda fonksiyonu çerçevesinde inceleyelim. Etkileri ayrıştırabilmek için, Lagrange fonksiyonunun dualini, yani başlangıçtaki yaşam boyu toplam fayda düzeyini kısıt alarak, yaşam boyu toplam harcamanın (tüketimin) minimize edilmesi problemini kurgulamamız gerekmektedir.

$$Z = [C_1(1+i) + C_2] + \mu\left[U_1 - C_1^{\alpha}C_2^{\beta}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial Z}{\partial C_1} = (1+i) - \mu\alpha C_1^{\alpha-1}C_2^{\beta} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \dfrac{(1+i)}{\alpha C_1^{\alpha-1}C_2^{\beta}} \\[2ex] \dfrac{\partial Z}{\partial C_2} = \mu - \beta C_1^{\alpha}C_2^{\beta-1} = 0 \quad \rightarrow \quad \mu = \beta C_1^{\alpha}C_2^{\beta-1} \end{array}\right\} \quad C_2 = \frac{\beta}{\alpha}(1+i)C_1$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \mu} = U_1 - C_1^{\alpha}C_2^{\beta} = 0$$

$$C_{1H} = \frac{U_1^{1/(\alpha+\beta)}}{\left[\dfrac{\beta}{\alpha}(1+i)\right]^{\beta/(\alpha+\beta)}} \qquad\qquad C_{2H} = \frac{U_1^{1/(\alpha+\beta)}}{\left[\dfrac{\alpha}{\beta}(1+i)\right]^{\alpha/(\alpha+\beta)}}$$

Faiz oranının $i_0 = 0{,}15$'ten $i_1 = 0{,}20$'ye yükseldiğini varsayarak, sayısal olarak ie ve ge'yi belirleyelim. İlk olarak faiz oranının $i_1 = 0{,}20$ olduğu durumda her bir dönem tüketiminin ne olduğuna bakalım (Şekil 48).

$$\alpha = 0{,}8, \beta = 0{,}5, i_0 = 0{,}15, i_1 = 0{,}20, M_1 = 2000, M_2 = 1000, U_1 = 14103{,}9$$

$$C_1 = \frac{1}{\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)}\left[M_1 + \frac{M_2}{(1 + i_1)}\right] \quad \rightarrow \quad C_1^1 = 1743{,}6$$

$$C_2 = \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right)}[M_1(1 + i_1) + M_2] \quad \rightarrow \quad C_2^1 = 1307{,}7$$

Şimdi de düzeltilmiş tüketim fonksiyonlarını (C_{1H}, C_{2H}) kullanarak, ie ve ge'yi belirleyelim.

$$C_{1H} = \frac{U_1^{1/(\alpha+\beta)}}{\left[\frac{\beta}{\alpha}(1+i)\right]^{\beta/(\alpha+\beta)}} \quad \rightarrow \quad C_1^{1\prime} = 1737{,}2$$

$$C_{2H} = \frac{U_1^{1/(\alpha+\beta)}}{\left[\frac{\alpha}{\beta}(1+i)\right]^{\alpha/(\alpha+\beta)}} \quad \rightarrow \quad C_2^{1\prime} = 1302{,}9$$

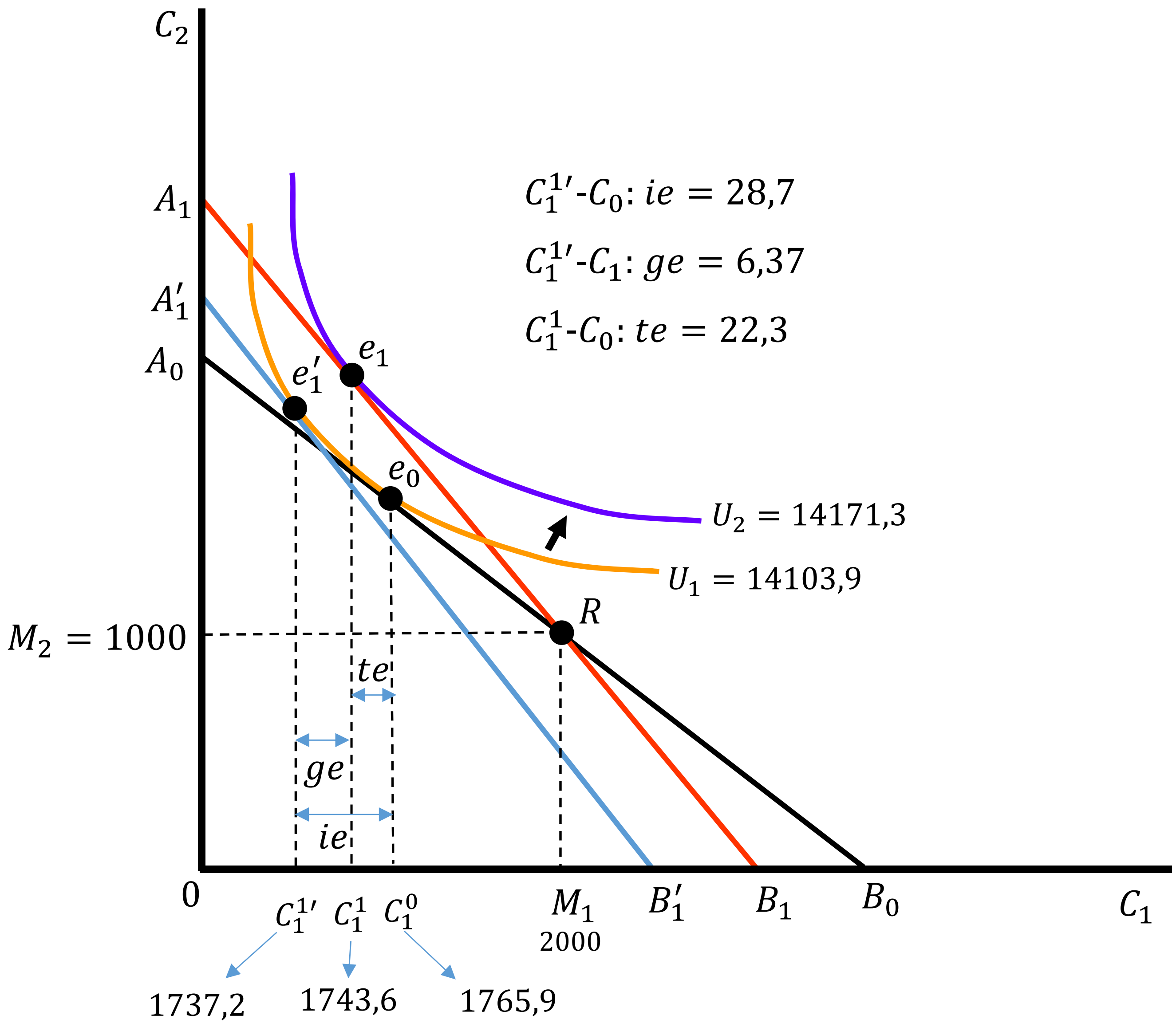
$C_1^{1\prime}$-C_0: $ie = 28{,}7$

$C_1^{1\prime}$-C_1: $ge = 6{,}37$

C_1^{1}-C_0: $te = 22{,}3$

Şekil 48. İki Dönemli Tüketimde İkame ve Gelir Etkileri

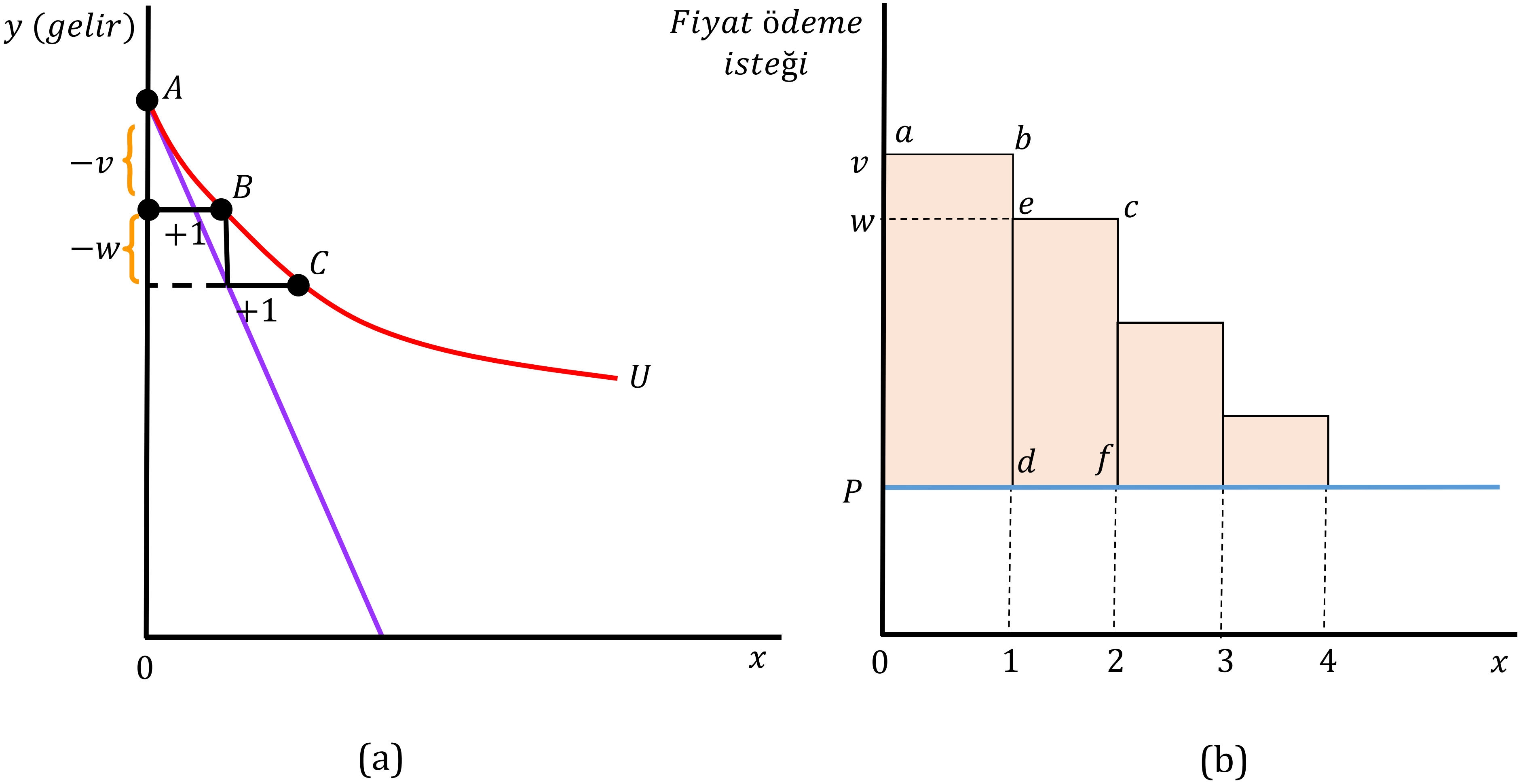
Faiz oranı yükseliyor: $i_0 = 0{,}15$'ten $i_1 = 0{,}20$'ye



Tüketici Rantı

Tüketici artığı, bireyin bir malı hiç tüketmemektense, bir birimini tüketebilmek için ödemeye hazır olduğu fiyattır. Aşağıdaki Şekil 49a'da A noktasında birey tüm gelirini diğer mallara harcamakta, hiç *x* malı tüketmemektedir. Eğer birey bir birim *x* malı tüketmek isterse, gelirinin (ya da diğer mallara yaptığı harcamanın) *v* kadarını *x* malı harcamasına kaydırmalıdır. Yani bireyin bir birim *x* malı için ödemeye razı olduğu fiyat *v*'dir. Benzer şekilde birey sonraki bir birim ek *x* malı tüketmek istediğinde *w* kadar ödemeye razı olacaktır. (b) şeklinde, her ek bir birimlik *x* malı tüketimi için ödemeye razı olduğu fiyatları dikey eksene işaretlersek, taralı (renkli) alan tüketici artığının kaba bir ölçüsünü vermiş olacaktır.

Şekil 49. Tüketici Rantının (CS) Hesaplanması



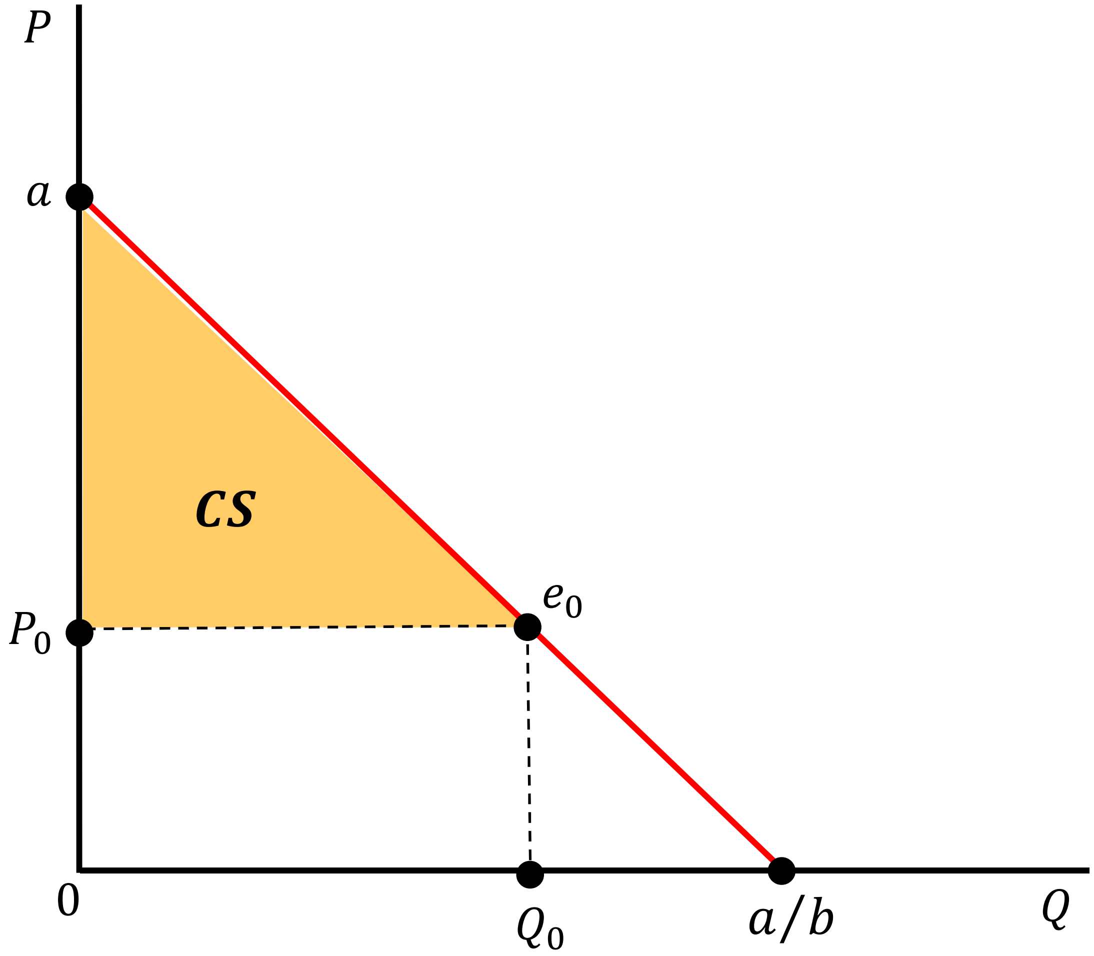
Yukarıda (b) şeklinde oluşturduğumuz tüketici artığı (CS) hesabı kaba bir yaklaşımdır. Tüketici artığını kesin bir şekilde hesaplayabilmek için, entegral hesapları kullanırız. Örneğin x malının talep fonksiyonunun ve piyasa fiyatının aşağıdaki gibi olduğunu varsayalım.

$$P = a - bQ \ , \ \ P = P_0$$

$$CS = \int_0^{Q_0} (a - bQ)dQ - P_0Q_0$$

$$CS = \left[aQ - \frac{bQ^2}{2}\right]_0^{Q_0} - P_0Q_0 = aQ_0 - \frac{b(Q_0)^2}{2} - P_0Q_0$$

Şekil 50. Tüketici Rantının Hesaplanması



$$P = 100 - 2Q$$

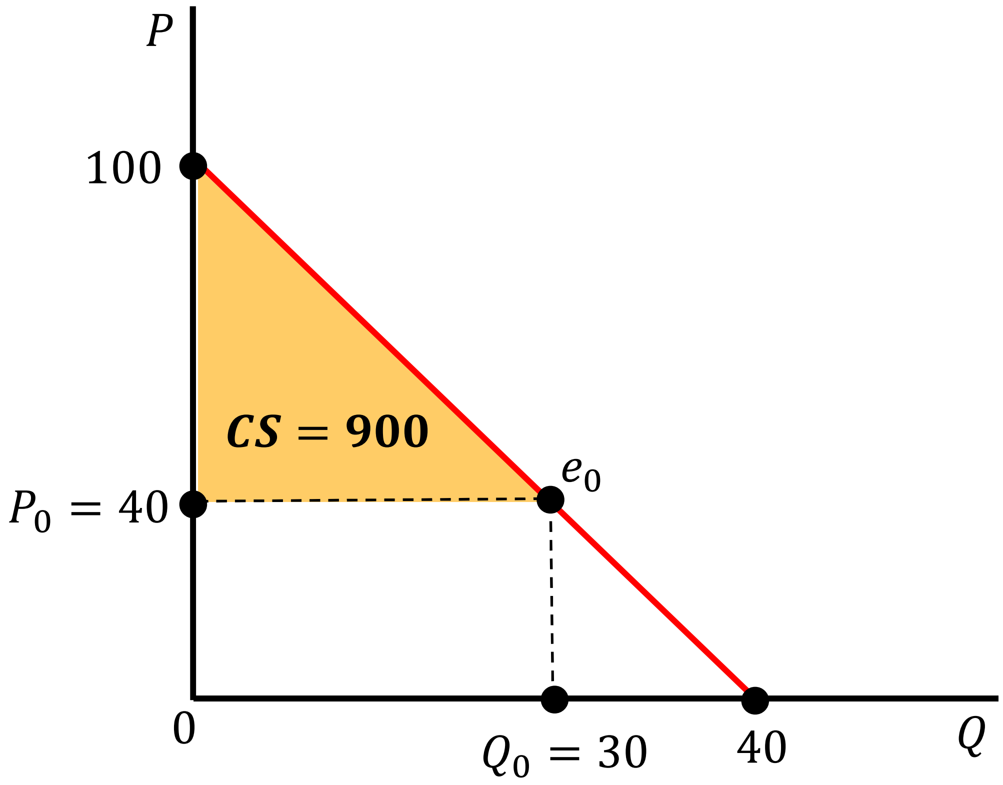
$$P_0 = 40, Q_0 = 30$$

$$CS = \int_0^{Q_0} (a - bQ)dQ - P_0Q_0$$

$$CS = \int_0^{Q_0} (100 - 2Q)dQ - (40).(30)$$

$$CS = \left[100Q - \frac{2Q^2}{2}\right]_0^{30} - 1200$$

$$CS = (100).(30) - (30)^2 - 1200 = 900$$

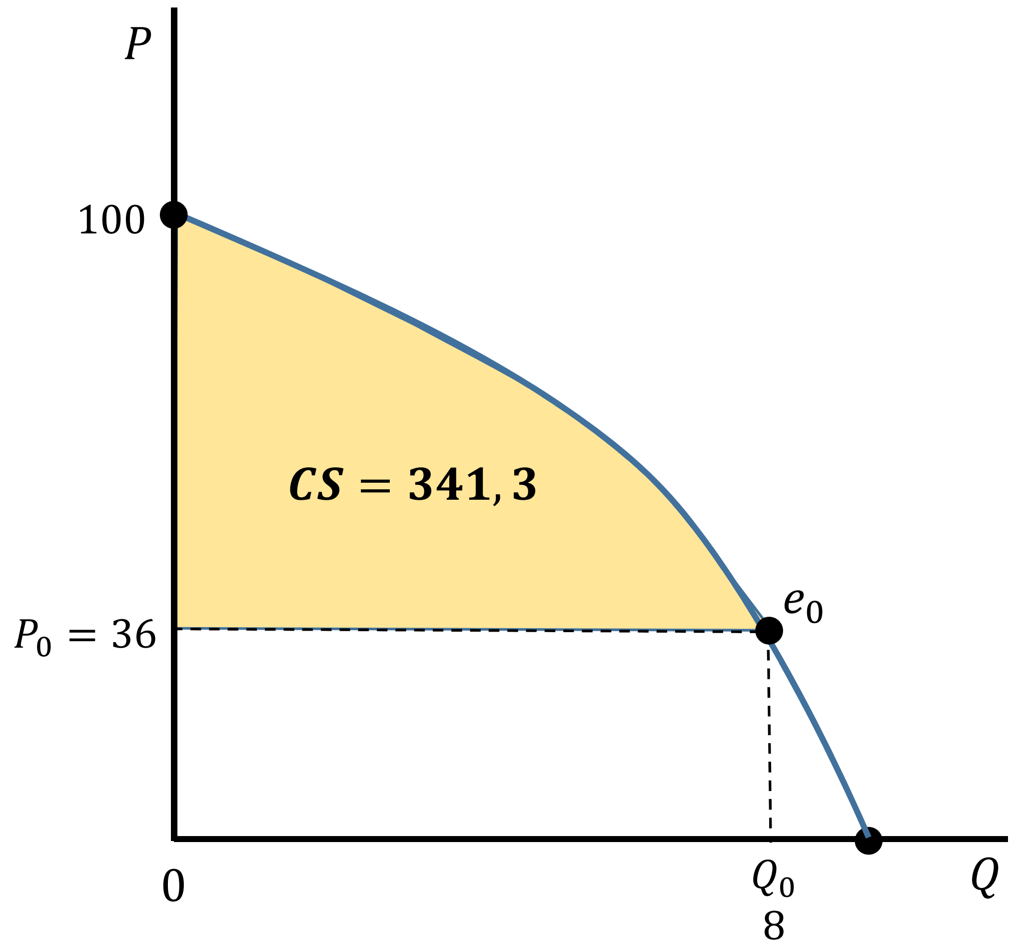


$$P = 100 - Q^2 \ , \ P^* = 36$$

$$CS = \int_0^8 (100 - Q^2)dQ - (36).(8)$$

$$CS = \left[100Q - \frac{Q^3}{3}\right]_0^8 - 288$$

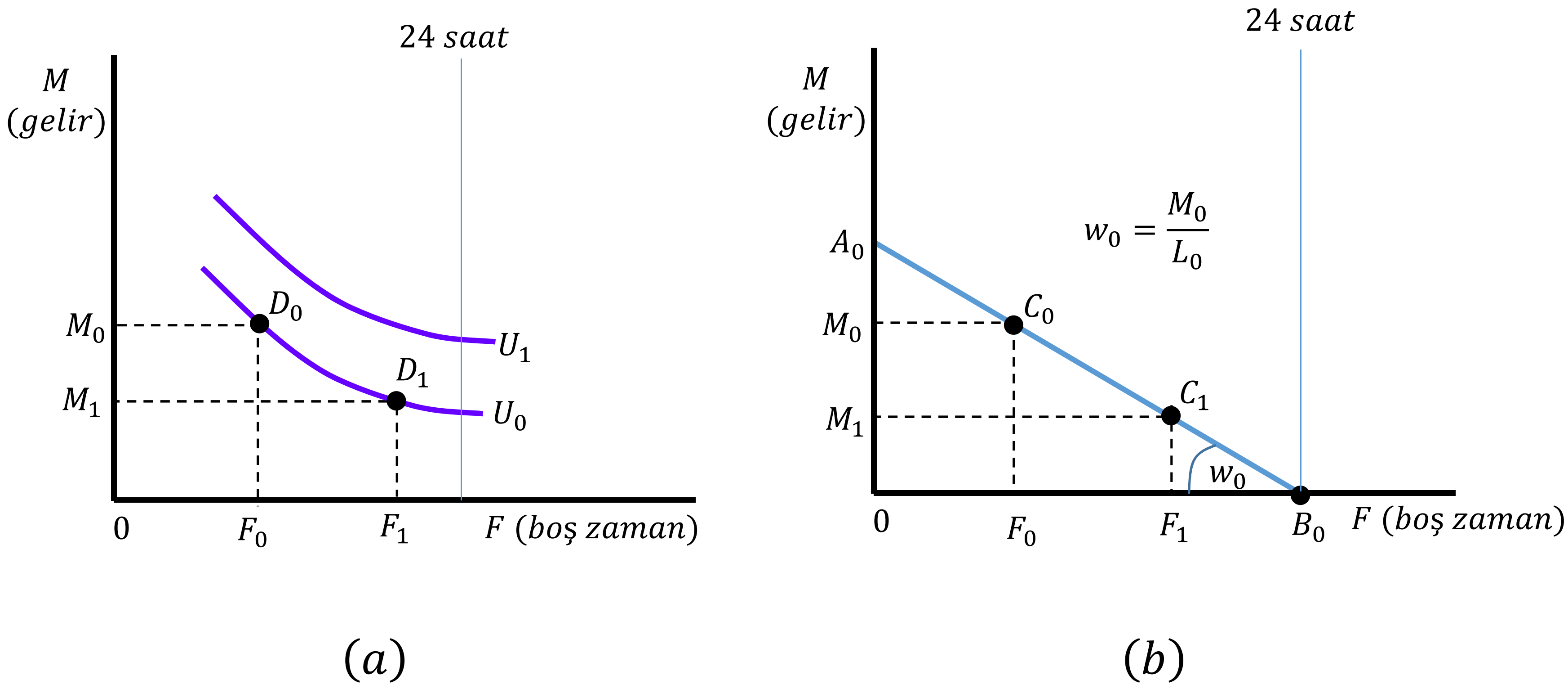
$$CS = (100).(8) - \frac{(8)^3}{3} - 288 = 341{,}3$$



Boş Zaman Tercihi, Ek Çalışma ve Ücret İlişkisi

Bireyin bir günde geçirebileceği zaman (24 saat), çalışma ile boş zaman arasında dağıtılabilir. Bireyin seçmekten keyif aldığı iki seçenek (gelir ve boş zaman) arasında optimal bir seçimin yapılabilmesini, kayıtsızlık eğrisi yaklaşımıyla ele alalım ve bireyin optimal çalışma süresini (işgücü arzını) belirleyelim. Bunun için ilk olarak gelir-boş zaman tercihlerini yansıtan kayıtsızlık eğrisini ve bütçe kısıtını tanıyalım. Şekil 51a gelir ile boş zaman arasındaki tercihleri gösteren kayıtsızlık eğrisi yer almaktadır. Dikey eksende bireyin işgücü arzı (çalışma) ile elde ettiği gelir (ücret) ile, eğer sahipse diğer üretim faktörlerinin (sermaye, girişimcilik, mülk) sağladığı gelirler (faiz, kâr, rant) toplamından oluşan geliri yer almakta; yatay eksende boş zaman (dinlenme, eğlenme, vb.) tercihi bulunmaktadır. Yatay ekseni günlük olarak düşündüğümüzde, 24 saat ile sınırlandırılmış olacaktır. Birey toplam 24 saatinin bir kısmını boş zaman, geriye kalan kısmını da çalışma olarak tercih edecektir. Örneğin Şekil 51b'de piyasa ücret oranı (w_0) veri olduğunda birey F_0B_0 kadar çalışıp, M_0 kadar gelir elde etmektedir. Firmalar bireyleri daha çok çalışmaya sevk edebilmek için, piyasa ücret oranını daha yüksek bir düzeye çıkartmalıdırlar.

Şekil 51. Gelir-Boş Zaman Kayıtsızlık Eğrisi ve Bütçe Denklemi



Örneğin F_0 kadar (saat) boş zaman kullanmak isterse, 24 saatten geriye kalan saatleri çalışma saati (işgücü arzı) olarak kullanacak ve bunun karşılığında M_0 kadar ücret geliri elde edecektir. Şekil 51b'de bütçe denklemi yer almaktadır. Bütçe denklemi, bireyin tüm gelirleri ile harcamalarının eşitliğini göstermektedir. Üzerindeki tüm noktalarda (C_0, C_1) harcamalar aynıdır. Bu nedenle bu eğriye eş-harcama eğrisi de diyebiliriz. Gelir-boş zaman tercihlerini yansıtan toplam fayda fonksiyonu ile bütçe denklemlerini şöyle yazabiliriz:

$$\left.\begin{aligned} U &= U(M_T, F) \\ M_T &= Y + wL \\ F + L &= 24 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} U &= U(Y + wL, F) \\ F + L &= 24 \end{aligned}$$

Bu denklemlerde M_T, tüm gelirler toplamı; Y, ücret dışı geliri; F, boş zaman; L, çalışma zamanı; w, ücret oranıdır.

Bireyin optimal işgücü zamanı tercihini belirleyebilmek için, toplam faydasını bütçe kısıtı altında maksimize eden Lagrange problemini oluşturacağız ve çözeceğiz.

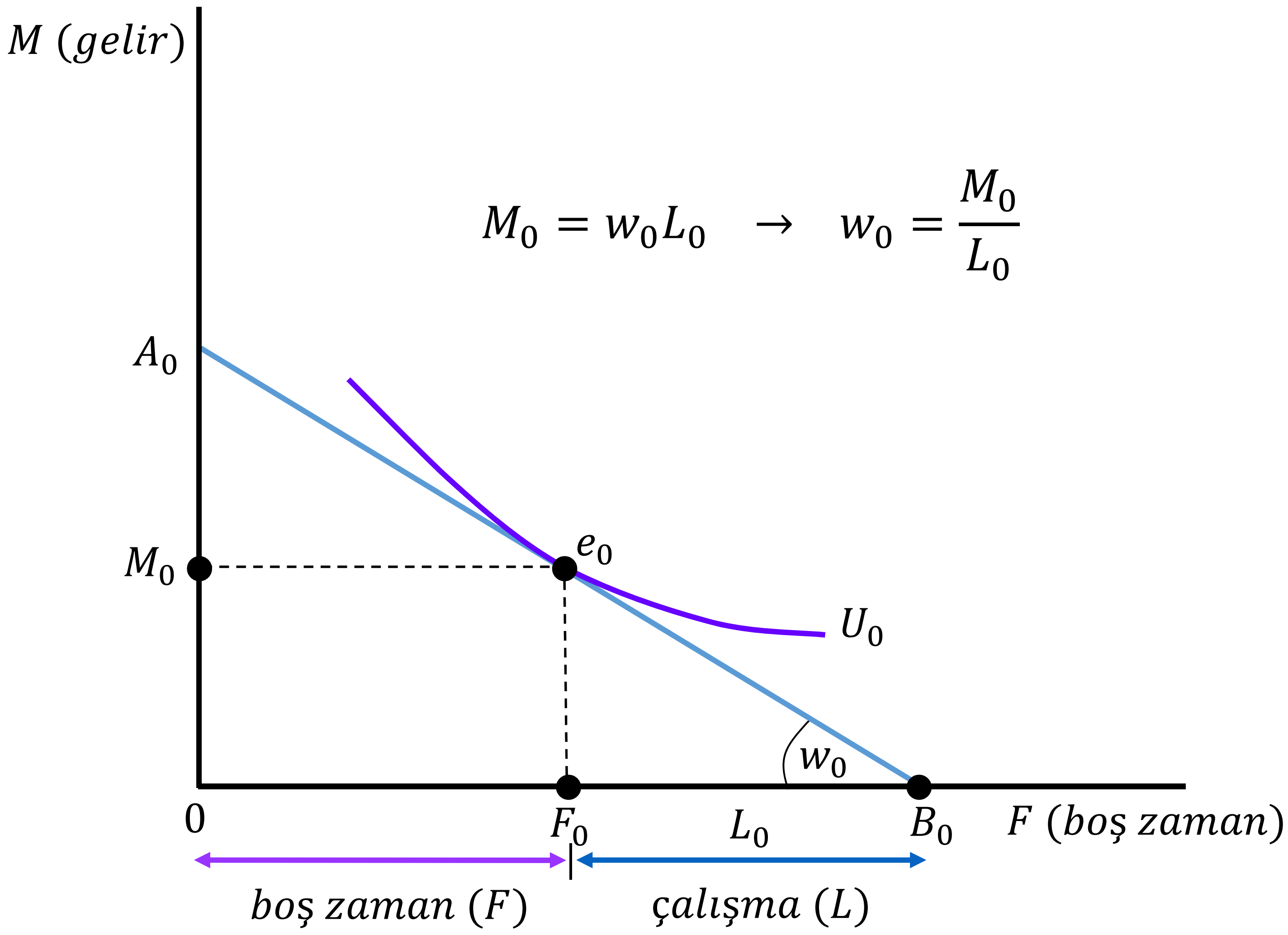
$$Z = U(Y + wL, F) + \lambda(24 - F - L)$$

$$\left.\begin{array}{l} Z_F = U_F - \lambda = 0 \\ Z_L = U_L - \lambda = 0 \end{array}\right\} \quad U_F = U_L$$

$$Z_\lambda = 24 - F - L = 0$$

Birinci sıra koşulların çözümünden, tüketicinin optimal tercihinin boş zaman ve çalışma gelirinin marjinal faydalarının eşitliği kuralından çıkarılabileceği sonucuna ulaşıyoruz. Bu denge durumu Şekil 52’de e_0 noktasıyla gösterilmiştir. Çalışma gelirinin marjinal faydası, boş zaman kullanımının marjinal faydasından büyük olduğu sürece birey geçerli ücret oranından (w_0) işgücü arzını sürdürecektir. Bu anlamda geçerli saatlik ücret oranı w_0, aynı zamanda *boş zaman kullanımının fırsat maliyetini* de temsil etmektedir.

Şekil 52. Boş Zaman Tercihi ve Ücret Oranı



Toplam fayda fonksiyonunun açık bir biçimini tanımlayarak, işgücü arz eğrisine ulaşalım. Sonra da aynı problemi sayısal olarak ifade edelim.

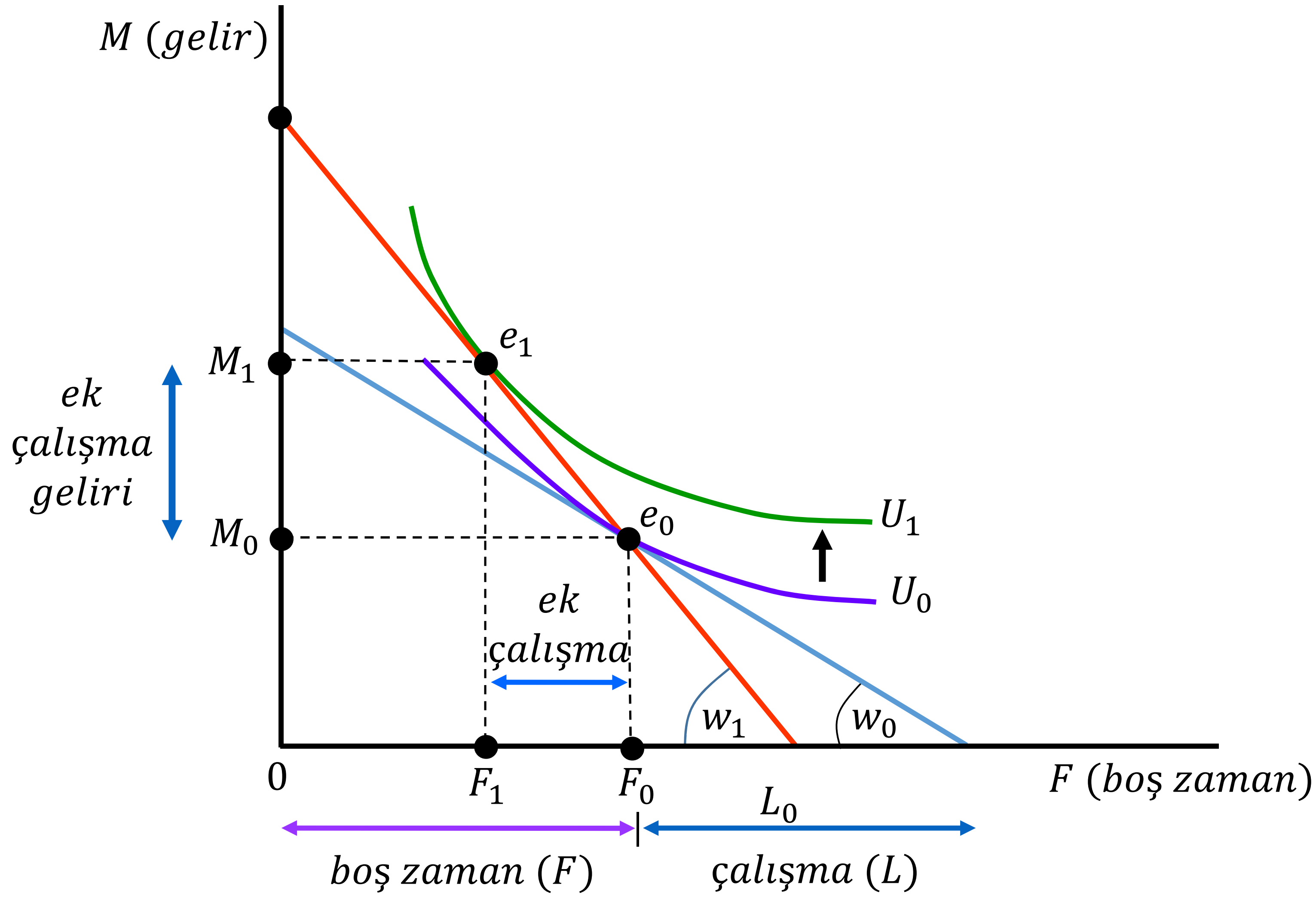
$$U = U(Y + wL, F) =$$

$$Z = U(Y + wL, F) + \lambda(24 - F - L)$$

$$\left.\begin{aligned} Z_F &= U_F - \lambda = 0 \\ Z_L &= U_L - \lambda = 0 \end{aligned}\right\} \quad U_F = U_L$$

$$Z_\lambda = 24 - F - L = 0$$

Şekil 53. Ücret Oranında Değişme ve İşgücü Arzı



Tüketici Refahı ve Fiyat Endeksleri

Kayıtsızlık eğrileri çözümlemesi, parasal gelir ve fiyat değişimlerinin tüketici refah düzeyini ne yönde etkilediği sorusunu yanıtlamada kullanılabilir.

Bu çözümlemede tüketicinin tüm gelirini harcadığını varsayıyoruz. Başlangıç döneminde (t=0) tüketicinin toplam geliri (=harcamaları) :

$$M_0 = \sum P_0 q_0$$

Sonraki bir t döneminde geliri :

$$M_t = \sum P_t q_t$$

Bireyin gelirinin ve fiyatların değiştiğini varsayalım. Değişimleri endeks olarak belirlersek, gelir endeksini şöyle yazabiliriz :

$$I_M = \left(\frac{M_t}{M_0}\right) 100$$

Fiyat değişimlerini belirlemek için LASPEYRES ve PAASCHE endeksleri kullanılabilir :

LASPEYRES Endeksi: $L = \left(\frac{\sum P_t q_0}{\sum P_0 q_0}\right) 100$

PAASCHE Endeksi: $P = \left(\frac{\sum P_t q_t}{\sum P_0 q_t}\right) 100$

- Gelir endeksi LASPEYRES endeksinden büyük olursa, tüketici t döneminde başlangıç dönemine göre daha iyi durumdadır.
- Gelir endeksi PAASCHE endeksinden küçük olursa, tüketici t döneminde başlangıç dönemine göre daha kötü durumdadır.

$\sum P_t q_0 \leq M_t$ olması durumunda, birey t dönemindeki fiyat ve gelir koşullarıyla, başlangıçtaki mal demetini (q_0) alabilir. Tüketici bu davranışını sürdürürse olur. Yani birey aynı kayıtsızlık eğrisinde kalır. Ancak birey t döneminde q_t gibi bir mal demetini tercih ederse, iki olası durum oluşur :

1. $\sum P_0 q_0 = \sum P_t q_0 = M_t$ ise, birey q_0'dan daha çok malı aynı fiyata satın alarak, daha yukarıdaki bir kayıtsızlık eğrisine (refah düzeyine) geçebilir.

$$\sum P_t q_0 < \sum P_t q_t$$

2. $\sum P_t q_t = \sum P_t q_0$ ise, q_0 ve q_t aynı bütçe doğrusu üzerinde olduğundan, birey daha yüksek refah düzeyini sağlayan q_t'yi tercih edecektir.

$\sum P_t q_0 < \sum P_t q_t$ eşitsizliğinin her iki yanını $\sum P_0 q_0$ ile bölüp, 100 ile çarpalım :

$$\underbrace{\frac{\sum P_t q_0}{\sum P_0 q_0} 100}_{\text{LASPEYRES Endeksi}} < \underbrace{\frac{\sum P_t q_t}{\sum P_0 q_0} 100}_{\text{Gelir Endeksi}}$$

Bu sonuç, Laspeyres endeks değerinin, gelir endeks değerinden küçük olduğu durumlarda, tüketici refahının arttığını göstermektedir. Bu sonucu, aşağıdaki kayıtsızlık eğrileri ile de gösterebiliriz.

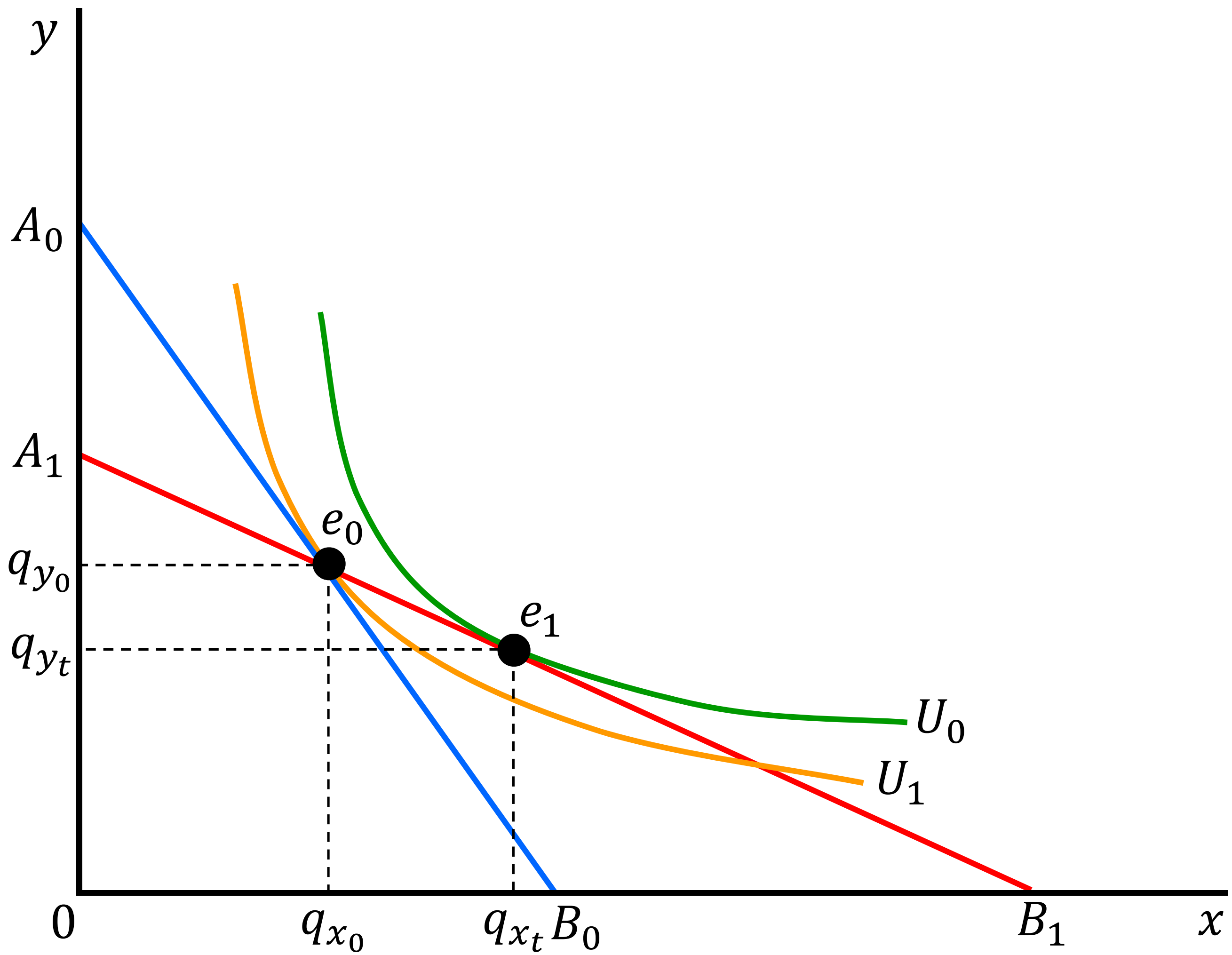
Şekil 54'te A_0B_0 bütçe doğrusunun denklemi şudur:

$$\sum P_0 q_0 = P_{x0} q_{x0} + P_{y0} q_{y0}$$

A_1B_1 bütçe doğrusunun denklemi şudur :

$$\sum P_t q_t = P_{xt} q_{xt} + P_{yt} q_{yt}$$

Şekil 54. Laspeyres Endeksi ve Refah Değişimi



Yeni bütçe doğrusu, e_1 noktasından geçmektedir. $e_1$noktasının A_1B_1bütçe doğrusunun altında olduğu durumlarda, e_1 noktası elde edilebilir olmasına rağmen tercih edilmeyecektir. Tercih edilmesi, gelirin tümünün harcandığı varsayımıyla çelişir. A_1B_1 bütçe doğrusunun e_1'den geçiyor olması, başlangıçtaki mal demetinin (q_{x_0}, q_{y_0}) yeni fiyat kümesiyle (P_{x_t}, P_{y_t}) elde edilebilir olduğu anlamına gelmektedir. Dolayısıyla tüketici başlangıçtaki mal demetini tüketmeye devam ederek, U_0 kayıtsızlık eğrisinde kalmayı sürdürebilir.

İkinci alternatif Şekil 55'teki e_1 noktasıdır. Bu durumda birey, yeni fiyat kümesi altında ulaşılması olanaklı bir başka mal demetini (q_{x_t}, q_{y_t}) seçerek, U_t gibi daha yüksek bir fayda düzeyini yakalayabilir. t döneminde tüketici gelirinin (M_t) tümünün harcanmakta olduğunu ve bireyin q_t mal demetini tercih ettiğini varsayalım. q_t mal demetinin başlangıç dönemi fiyatlarıyla maliyeti $\sum P_0 q_t$dır. $\sum P_0 q_0 > \sum P_0 q_t$ ise, t döneminde seçilen mal demeti başlangıçta da elde edilebilir. Ancak q_t mal demeti q_0 mal demetinden daha düşük bir kayıtsızlık eğrisi üzerinde olduğundan, başlangıçta tercih edilmemiştir.

Şekil 55'te bireyin t_0 anındaki dengesi e_0 noktasıdır. Birey, A_0B_0 bütçe doğrusu üzerinde olmasına rağmen e_1 noktasına karşılık gelen mal demetini tercih etmemiştir. Çünkü e_1 noktasında bireyin refah düzeyi daha düşüktür.

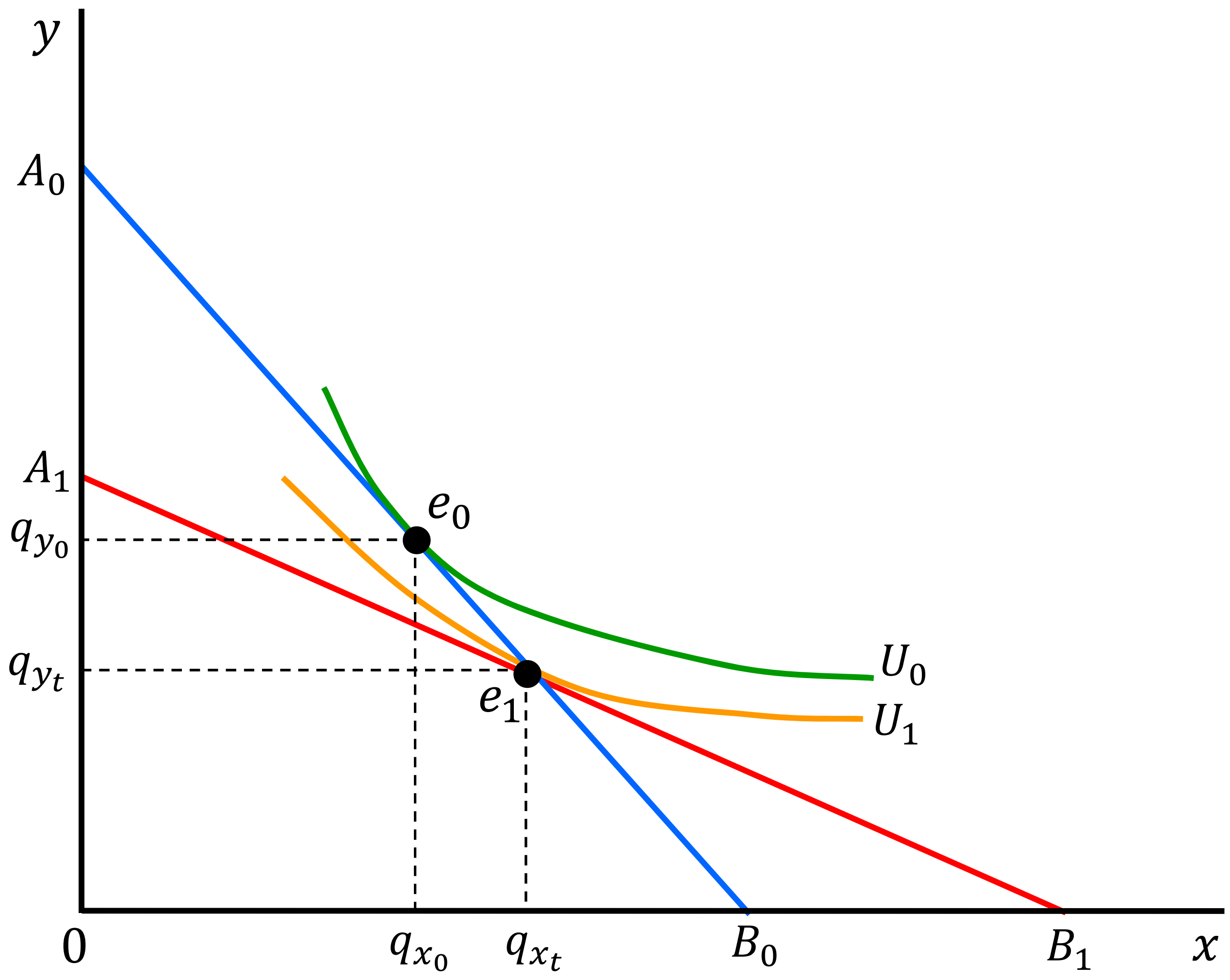
$\sum P_0 q_0 > \sum P_0 q_t$ eşitsizliğinin her iki yanını $\sum P_t q_t$ ile bölüp, 100 ile çarpalım :

$$\frac{\sum P_0 q_0}{\sum P_t q_t} 100 \;>\; \frac{\sum P_0 q_t}{\sum P_t q_t} 100$$

Bu iki ifadeyi tersine çevirelim :

$$\underbrace{\frac{\sum P_t q_t}{\sum P_0 q_0} 100}_{\text{Gelir Endeksi}} \;<\; \underbrace{\frac{\sum P_t q_t}{\sum P_0 q_t} 100}_{\text{PAASCHE Endeksi}}$$

Şekil 55. Paasche Endeksi ve Refah Değişimi



Bu son ifadeye göre, gelir endeksi Paasche endeksinden küçükse, tüketici t döneminde başlangıç dönemine göre daha kötü durumdadır. Yani bireyin yeni bütçe doğrusu (A_1B_1), q_0 mal demetinin altında kalmakta, dolayısıyla başlangıçtaki mal demetini, yeni fiyatlarla (P_t) satın alamamaktadır.

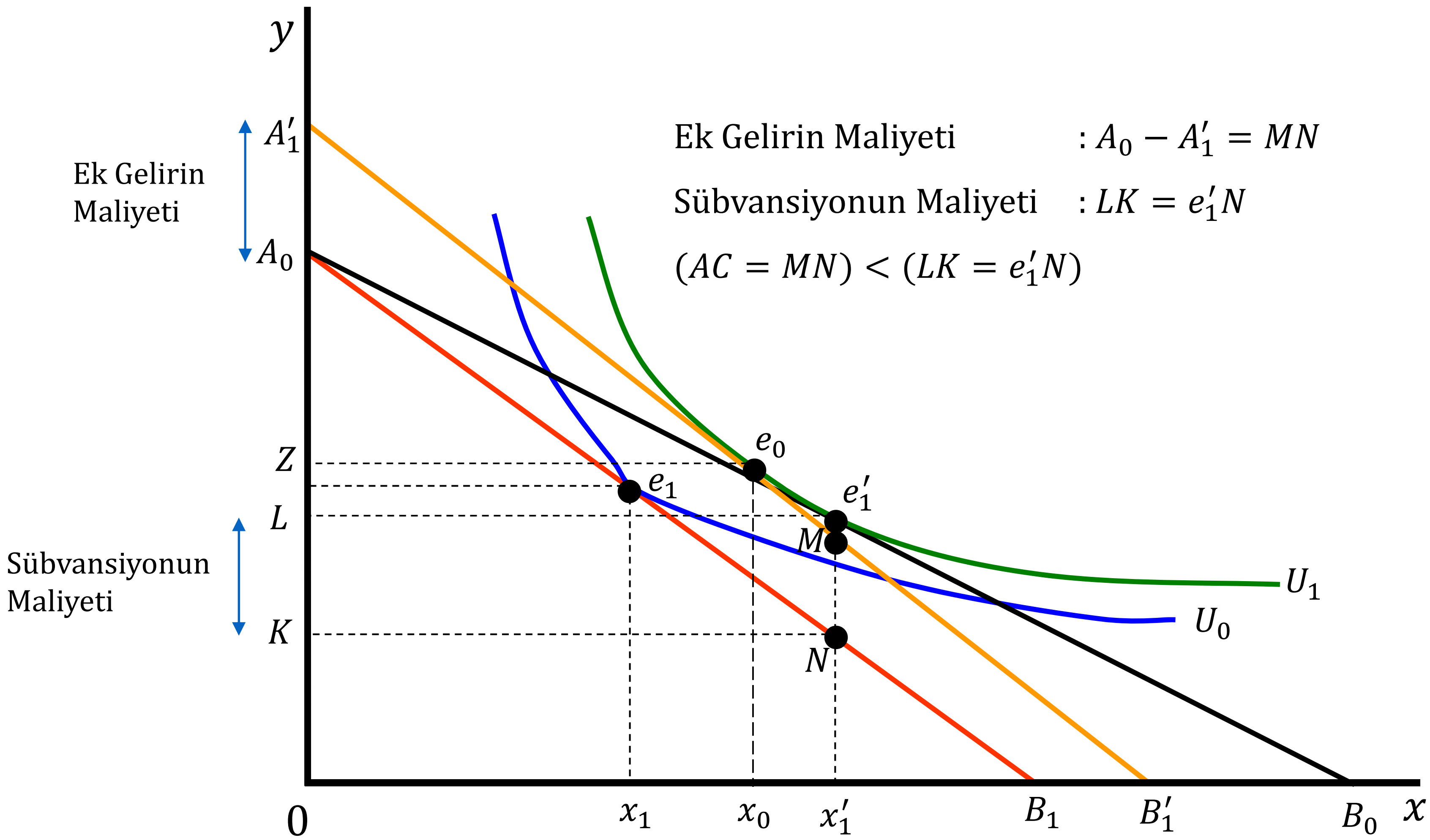
Yukarıda endekslere ilişkin yaptığımız tüm analizlerde, tüketicinin zevk ve tercihlerinin sabit kaldığını varsaymaktayız.

Tüketici Refahı ve İktisat Politikası

Hükümet emeklilerin desteklenmesi için gıda sübvansiyonu ve ek gelir sağlanması gibi iki politikadan bir tanesini uygulamayı düşünmektedir. Bu politikalardan hangisi emeklilerin refahını maksimize ederken, kamu bütçesi üzerindeki yükü minimize etmektedir. Yukarıdaki şekilde e_0 denge noktasında birey A_0Z kadar harcama karşılığında x_0 kadar gıda maddesi tüketimi yapmakta, Z kadar geliri de gıda malları dışındaki mallara harcamaktadır (Şekil 56).

Hükümetin amacı, emeklinin daha yüksek bir refah (fayda) düzeyine (örneğin U_1) ulaşmasını sağlamaktır. Hükümet bunu sağlayabilmek için emekliye kupon vererek x malını yarı fiyata alabilme olanağını vermiş olsun. Bu uygulama sonucu emeklinin A_0B_0 bütçe doğrusu, A_0B_1 olacak şekilde sağa kayar. Yeni bütçe doğrusu U_1'e e_1 noktasında teğettir. Bu yeni denge noktasına göre emekli birey x_2 birim gıda maddesi tüketecek ve bunun için A_0L kadar harcama yapacaktır.

Şekil 56. Tüketici Refahı ve İktisat Politikası



Yeni tüketim miktarı eskisinden $x_1 - x_0$ kadar fazladır. Sübvansiyon olmadığı durumda emekli x_2 miktar tüketim için A_0K kadar ödeme yapmak zorundadır. Ancak hükümet emekliyi sübvanse ettiğinden, emeklinin gerçekte yapacağı ödeme A_0L (=$A_0K - KL$)'dir. Satıcıya her birim gıda malı (x) için A_0K birim ödeme yapılmakta, bunun A_0L kadarını emekli, A_0K kadarını da hükümet karşılamaktadır. Buna göre sübvansiyon politikasının hükümete maliyeti KL'dir. Bu politika gıda fiyatını etkilemediğinden, diğer tüketiciler bundan etkilenmez. Bu politika özellikle belirli bir gıda maddesinde aşırı arz bulunduğu durumlarda uygundur.

Alternatif olarak hükümetin gelir politikası izlemeye karar verdiğini varsayalım. Bu durumda hükümet emeklinin refah düzeyini U_1'den U_2'ye çıkartabilmek için ek gelir uygulamasına geçer. Bütçe doğrusu A_0B_0'a paralel ve U_2'ye teğet olacak biçimde ek gelir kadar sağ üst yönde kayar (A_1B_1'). Yeni denge noktası e_3 olur. Yeni durumda emeklinin x malı tüketimi x_3'tür. Ek gelir politikasının hükümete maliyeti $A_0 - A_1'$'dir. Bu değer, sübvansiyon politikasının yol açtığı maliyetten daha düşüktür. $A_0 - A_1' = MN < LK = e_1'N$

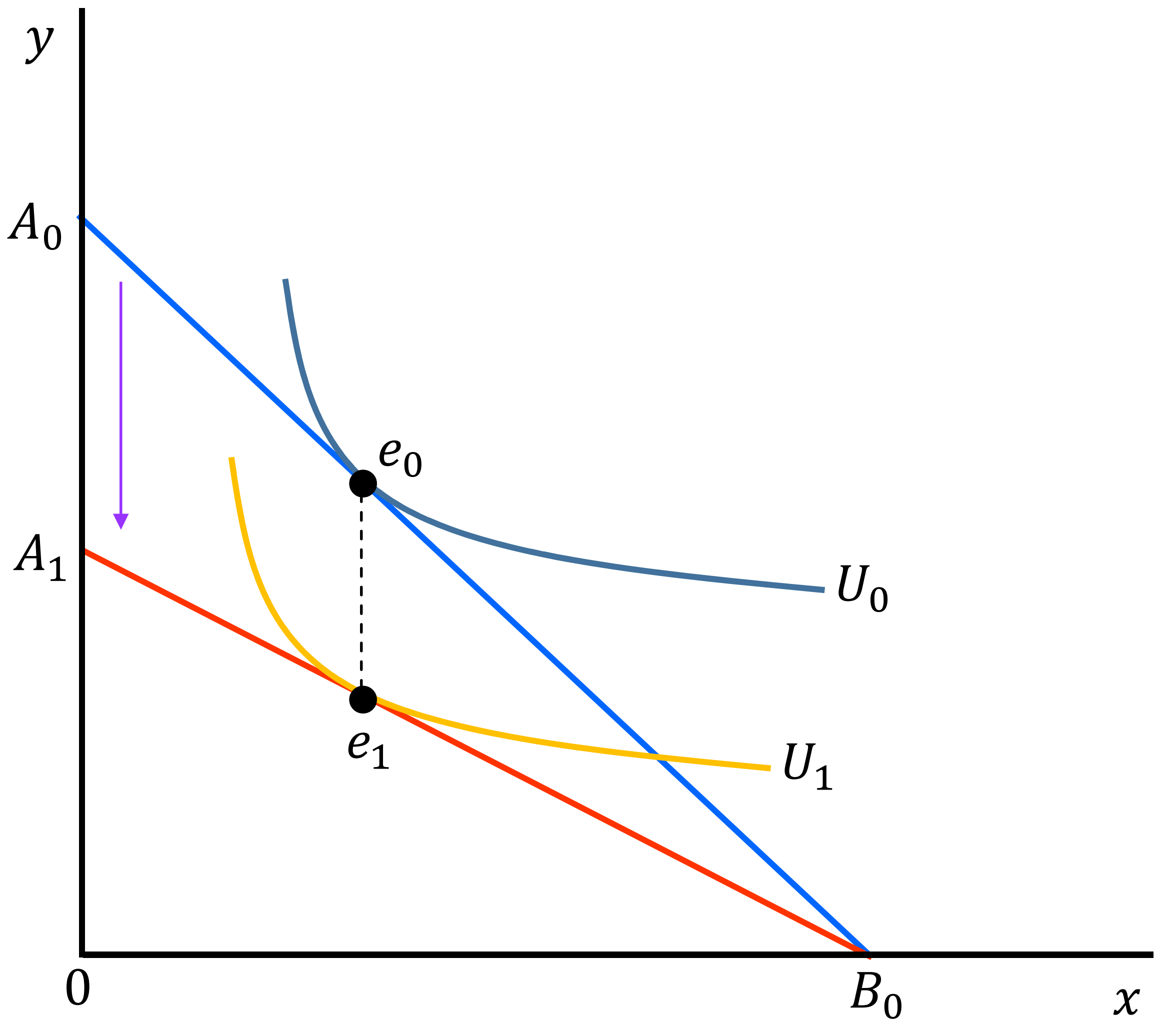
Kamu bütçesine getireceği yük açısından bakıldığında, ek gelir politikasının daha az maliyetli olduğu görülmektedir. Ancak hangi politikanın uygulanacağı amaçlara bağlıdır. Örneğin ek gelir politikası daha enflasyonisttir. Sübvansiyon politikası, stok azaltıcı bir işlev görür.

Vergi Uygulamalarının Tüketici Refahına Etkileri

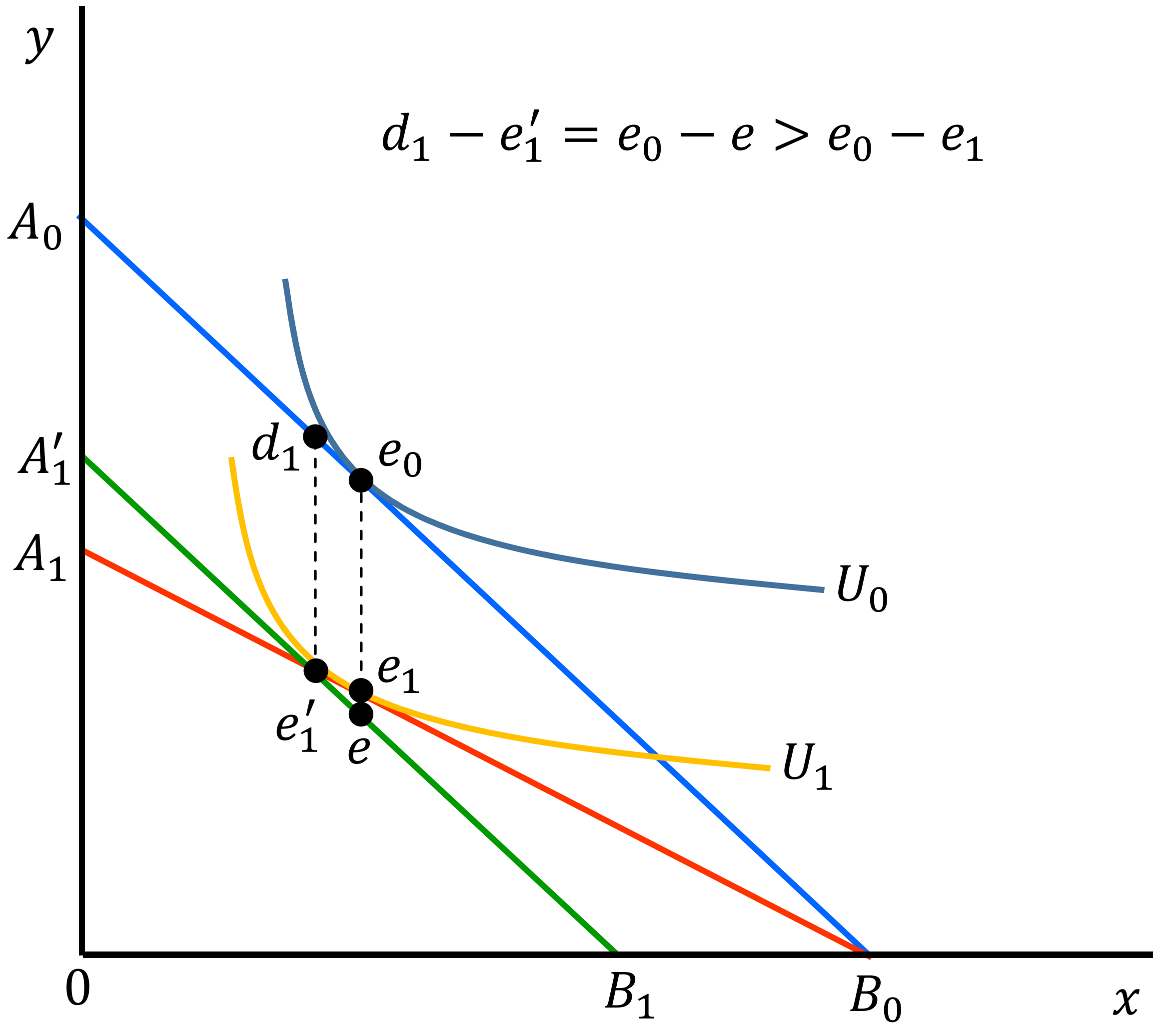
Önce satış vergisinin etkisine bakalım. Burada devlet y malı üzerinden vergi almaktadır. Verginin tamamının tüketicilere yansıdığını varsayalım. Bütçe eğrisi A_0B_0'dan, A_1B_0 biçimine hareket etmiştir. Vergi nedeniyle birey y malına daha yüksek fiyat ödediğinden, ikame ve gelir etkileri nedeniyle refah denge düzeyi U_0'dan U_1'e gerilemiştir. y malı cinsinden vergi hasılatı $e_0 - e_1$'dir. Parasal vergi geliri, $e_0 - e_1$ ile y malının vergi öncesi fiyatının çarpımıyla bulunur (Şekil 57).

Şimdi götürü verginin etkisine bakalım. Burada devlet $d_1 - e_1' = e_0 - e$ kadar bir götürü vergi uygulamaktadır. Götürü vergi malların göreli fiyatlarını değiştirmez, ancak vergi ölçüsünde bireyin geliri, dolayısıyla da refahı azalır. Götürü vergi sonrası bireyin bütçe denklemi $A_1'B_1$ biçimini alır. Yeni tüketici denge noktası e_1''dür. Götürü vergi uygulaması sonucu devletin vergi geliri $e_1 - e$ kadar artmıştır. Bu miktar, y malı üzerindeki satış vergisinin yol açtığı etkinlik kaybıdır (Şekil 58).

Şekil 57. Satış Vergisi ve Tüketici Refahı

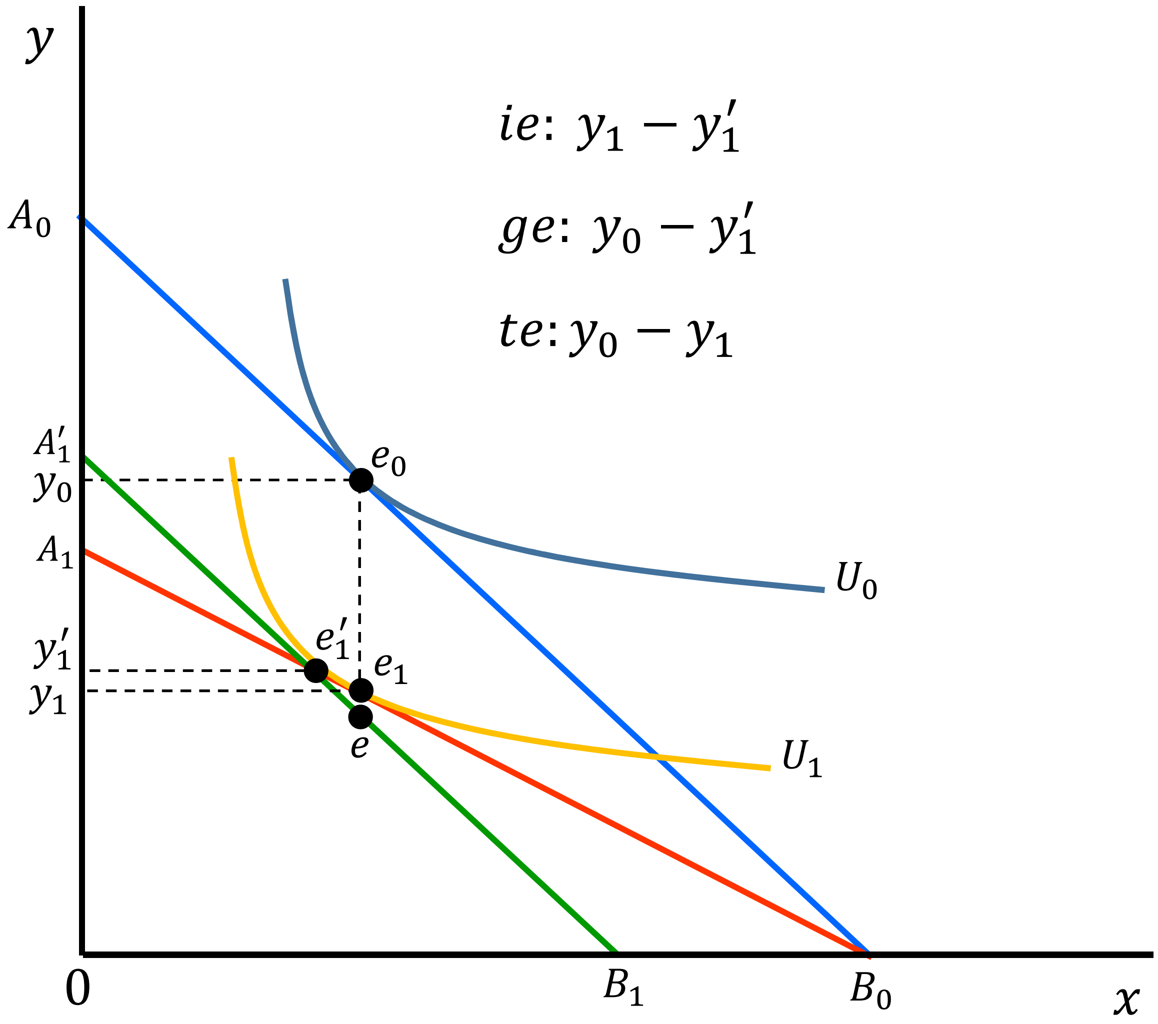


Şekil 58. Götürü Vergi ve Tüketici Refahı



Şekil 59'da y malına uygulanan dolaylı verginin yol açtığı e_0'dan e_1'e doğru tüketici dengesindeki toplam değişim ($y_0 - y_1$) iki etkiden oluşmaktadır. Bütçenin paralel kaymasıyla oluşan kısım $(y_0 - y_1')$ gelir etkisi; $y_1 - y_1'$ de ikame etkisidir. İkame etkisi sıfır ise, y malına uygulanan dolaylı vergi etkinlik kaybına yol açmaz. Örneğin y malı bağımlılığı yüksek olan bir mal ise, kayıtsızlık eğrisi bağımlılığı güçlü olan bireylerde L biçimliye dönüşür. Böyle durumlarda birey y malının yerine x malını ikame etmek istemeyecektir. Dolayısıyla vergi etkinlik kaybı ya hiç yoktur ya da çok küçüktür.

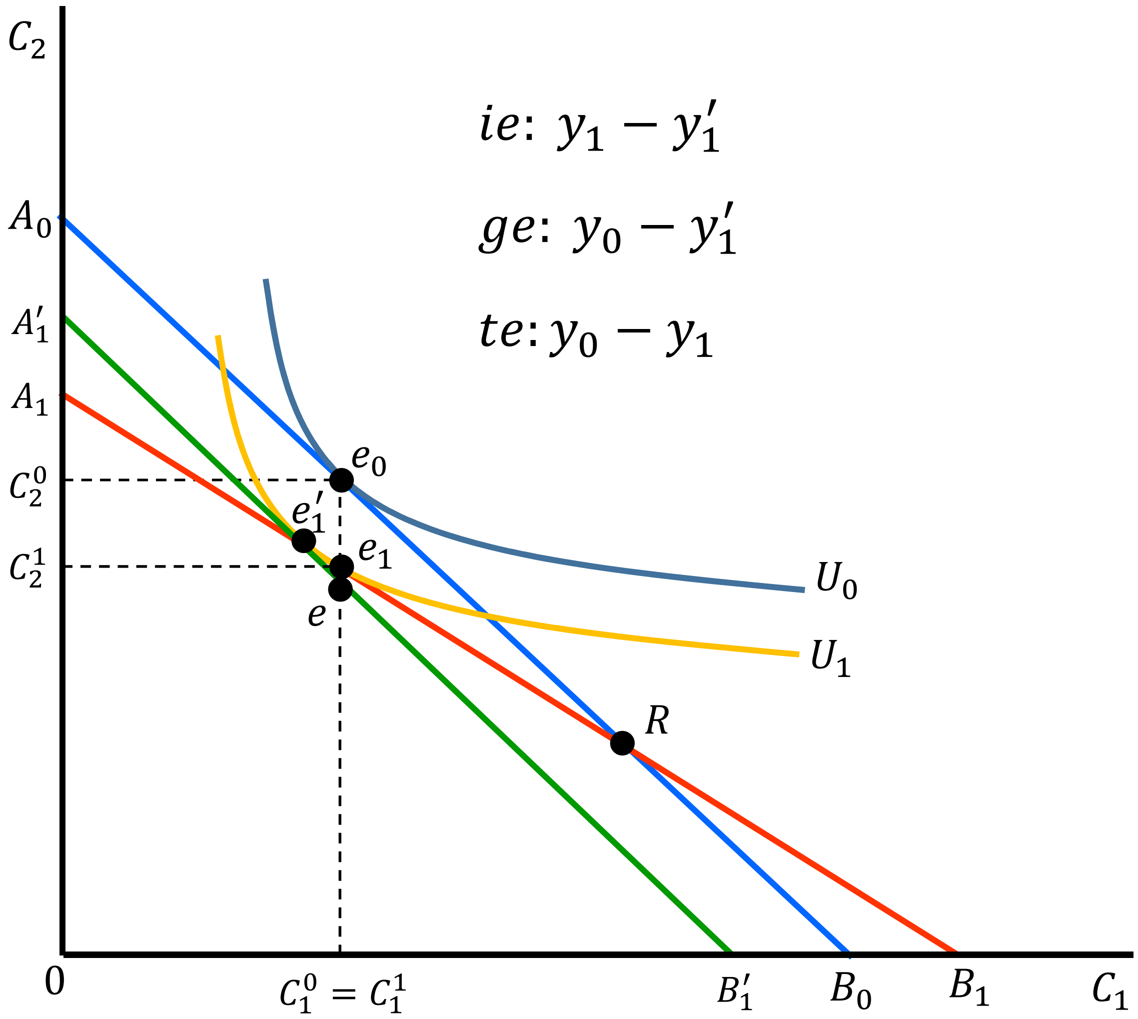
Şekil 59. Satış Vergisinin Yol Açtığı İkame ve Gelir Etkileri



Başlangıçta bireyin dengesi e_0 noktasında oluşmuştur. Bireyin toplam geliri üzerinden t oranında bir sabit oranlı vergi alındığını varsayalım. Bu durumda zaman bütçe doğrusu (A_0B_0) paralel olarak orijin noktasına doğru kayar $(A_1'B_1)$. Bireyin yeni denge noktası e_1''dür. Vergi artışı gelir azalışına neden olduğundan, her iki dönem tüketimi de azalmıştır. Birey U_1 gibi daha düşük bir fayda düzeyindedir. Devletin vergi geliri $e_0 - e$ kadardır.

Şimdi bireyi aynı fayda düzeyine (U_1) indiren bir faiz gelir vergisi uygulamasına bakarak, vergi etkinlik kaybını belirleyelim (Şekil 60). Faiz gelirinden vergi alınması, bütçe doğrusunun R ekseni üzerinde saat yönünün tersine hareketine neden olur. Yani yeni zaman bütçe doğrusu A_1B_1'dir. Bu örnekteki faiz geliri vergisi, bireyin tasarruf kararı üzerinde yansız bir etkiye sahiptir. Bu nedenle birey, birinci dönem tüketimini değiştirmemektedir: $C_1^0 = C_1^1$

Şekil 60. Faiz Üzerinden Alınan Verginin Yol Açtığı İkame ve Gelir Etkileri



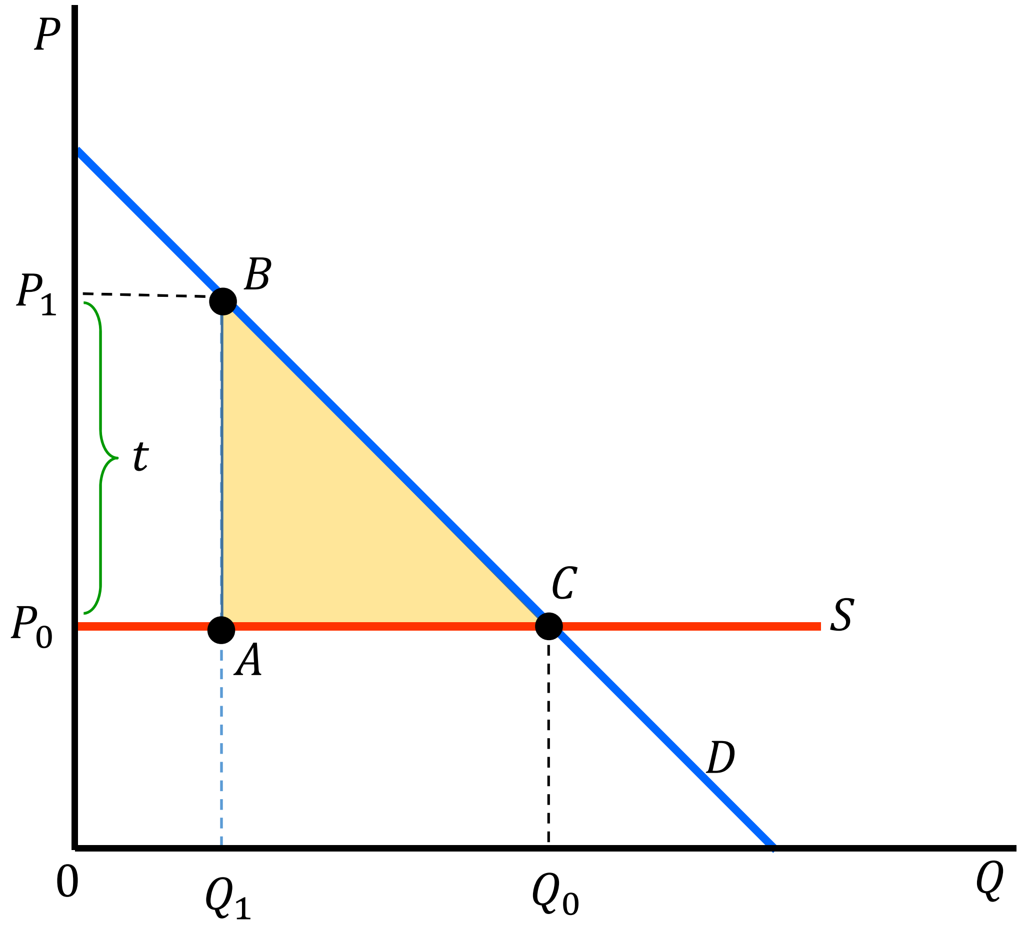
Toplam gelirin vergilendirilmesi gelir etkisini (e_0'dan e_1'e), faiz geliri uygulaması da ikame etkisini (e_1'den e_1''e) göstermektedir. Toplam gelir vergisi ile faiz geliri vergisi uygulamaları, $e_1 - e$ kadar bir vergi etkinlik kaybına neden olmaktadır. Bu sapmanın derecesi, ikame etkisinin büyüklüğüne, bu da cari ve gelecekteki tüketimin ne ölçüde ikame olduğuna bağlıdır.

Vergi Uygulaması ve Etkinlik Kaybı

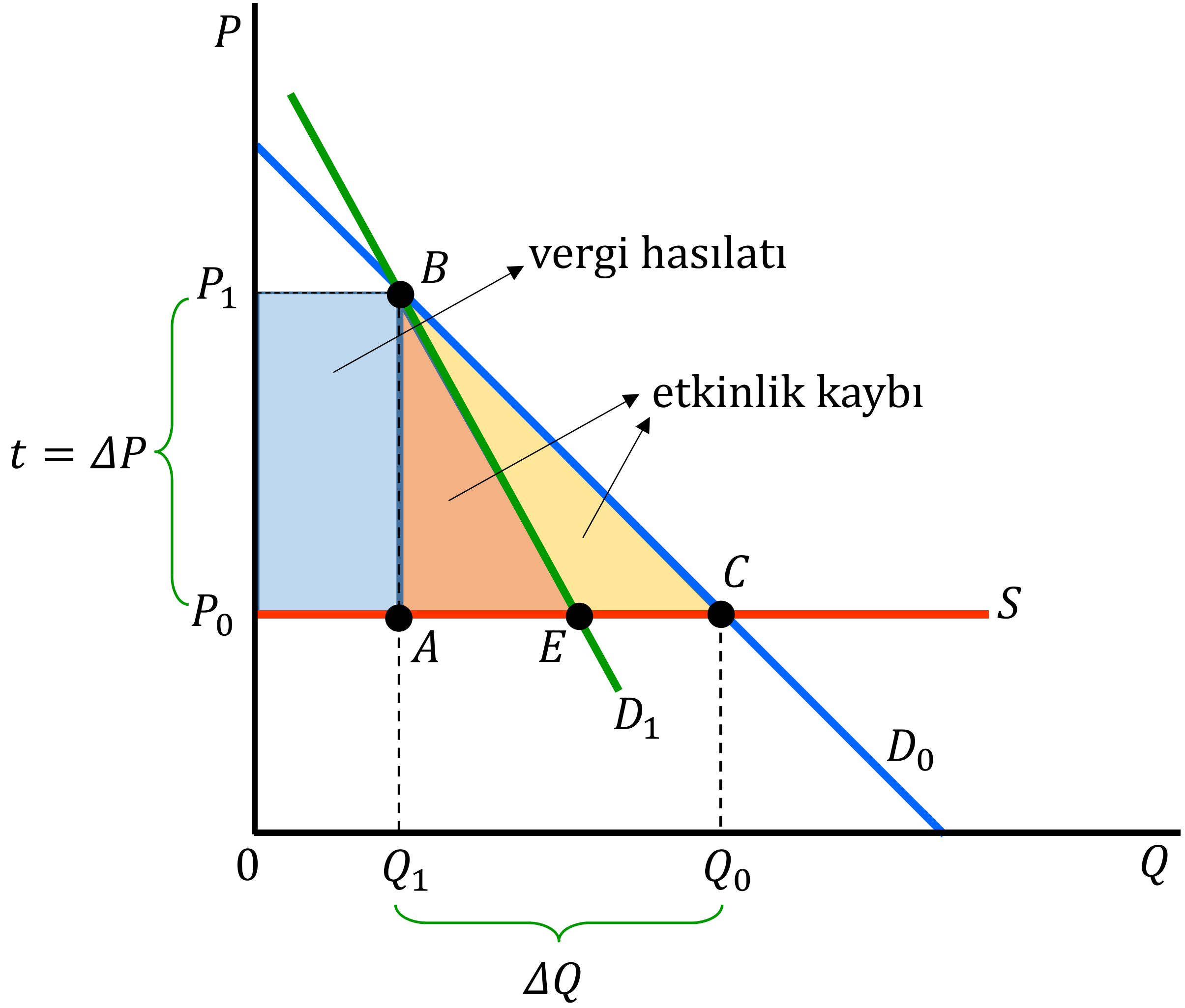
Bireyin aynı fayda düzeyinde kalmasını sağlayacak şekilde vergi artışını dikkate alırsak, tüketici rantı değişiminin devlete vergi olarak gitmeyen kısmı, vergi etkinlik kaybının toplam ölçüsünü verecektir. Fiyatın t ölçüsünde vergi artışı nedeniyle P_1'den P_2'ye yükselmesi sonucu tüketicinin rant kaybı P_0P_1BC dik yamuk alanı kadardır. Ancak devlet yalnızca P_0P_1BA alanı kadar bir vergi toplamış olacaktır. Dolayısıyla ABC alanı vergi etkinlik kaybıdır (Şekil 61).

Vergi iki katına çıkarsa, etkinlik kaybı iki katından daha çok artar. Bunun nedeni, talep eğrisinin sıfırdan büyük esneklik değerine sahip olmasıdır. Esneklik arttıkça (talep doğrusu yataylaştıkça), etkinlik kaybı da artmaktadır (Şekil 62).

Şekil 61. Vergi Uygulaması ve Etkinlik Kaybı



Şekil 62. Fiyat-Talep Esnekliği ve Vergi Etkinlik Kaybı



$$\frac{Etkinlik\ Kaybı}{Vergi\ Hasılatı} = \frac{(t.\Delta Q)/2}{Q.\Delta P} = \frac{t}{2}\frac{\Delta Q}{\Delta P}\frac{1}{Q}$$

$$= \frac{t}{2}\frac{\Delta Q}{\Delta P}\frac{1}{Q}\frac{P}{P} = \frac{1}{2}\frac{t}{P}\frac{\Delta Q}{\Delta P}\frac{P}{Q}$$

$$\frac{Etkinlik\ Kaybı}{Vergi\ Hasılatı} = \frac{1}{2}\frac{t}{p}\varepsilon_D$$

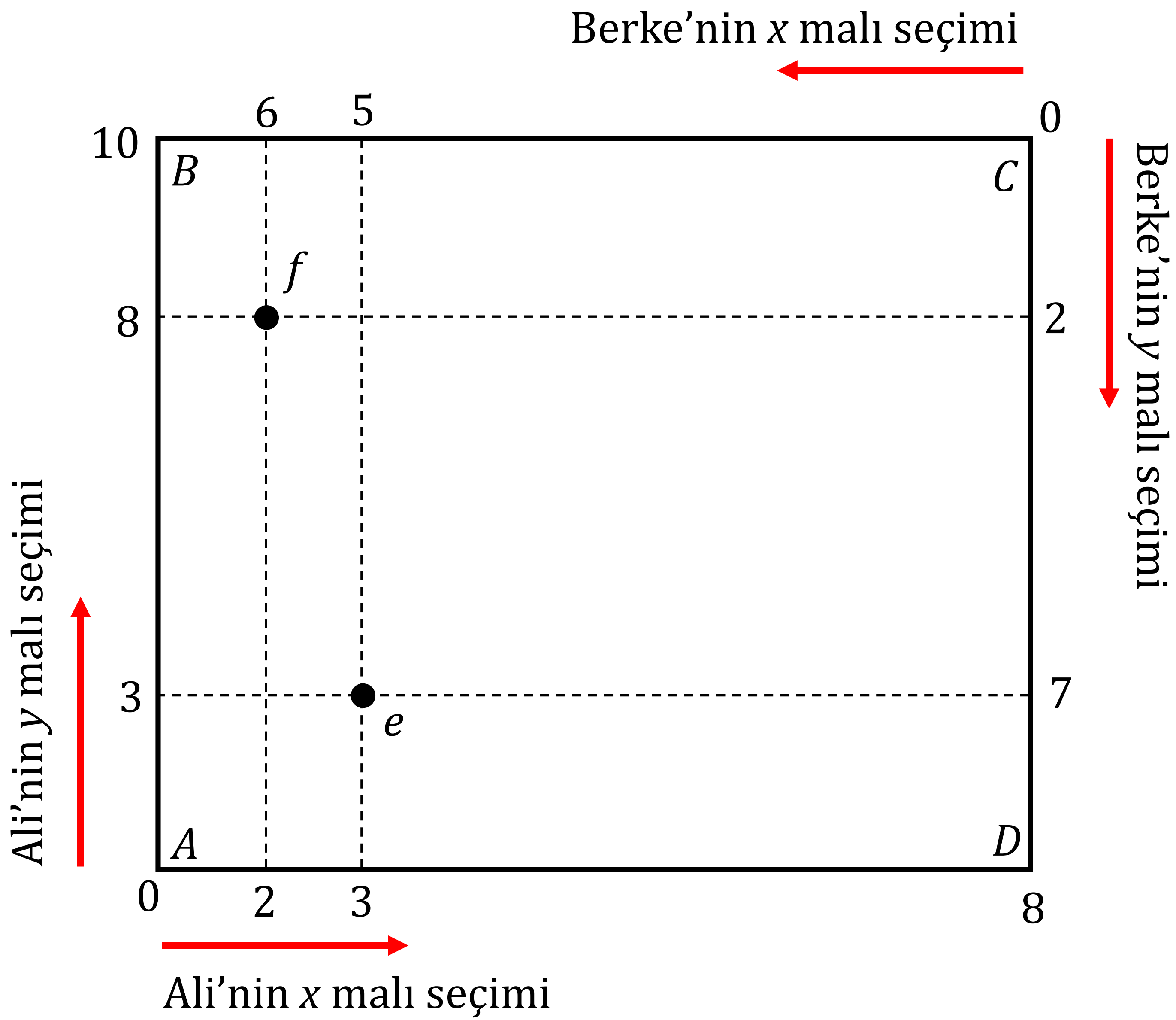
Pareto Optimalite ve Edgeworth Yaklaşımı

Şimdiye kadar tek bireyi dikkate alan bir fayda analizi yaptık. Birey sayısını ikiye çıkararak, aynı anda iki birey için de optimal seçimlerin, yani dengenin nasıl oluştuğuna bakalım. Bu amaçla Francis EDGEWORTH tarafından geliştirilmiş olan kutu analizini kullanacağız.

EDGEWORTH kutu analizi, iki birey, iki mallı bir ekonomide dengenin nasıl oluştuğunu göstermektedir.

Şekil 63'de yatay eksenlerde ekonomideki toplam x malı miktarı, dikey eksenlerde de y malı miktarı yer alıyor. Bireylerden birinin bir malı daha çok tercih ediyor olması, diğerinin seçiminin azalmasına yol açacaktır. Dolayısıyla kısıtlı bir malın aynı anda iki birey tarafından tercih edilmesinde bir karşıtlık vardır.

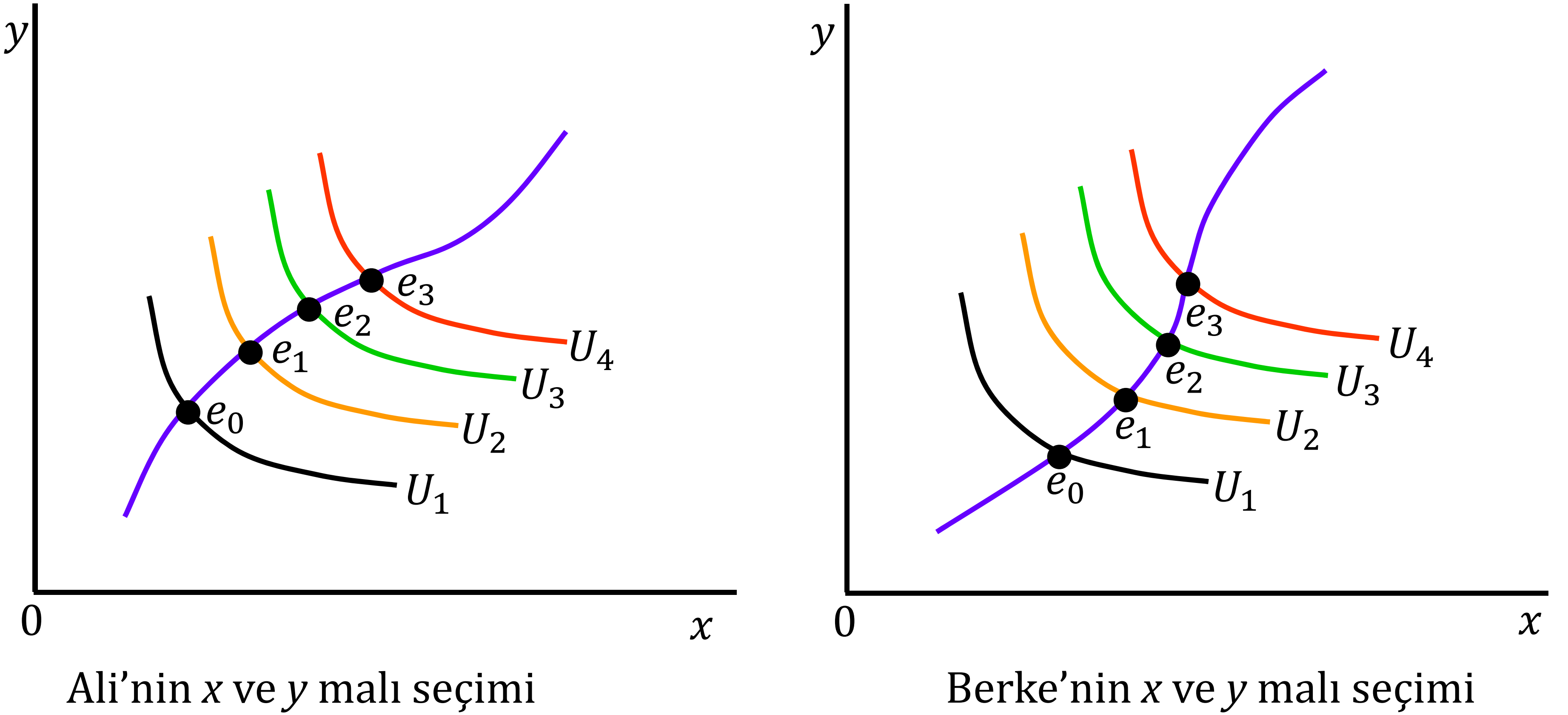
Şekil 63. Edgewort Kutu Analizi



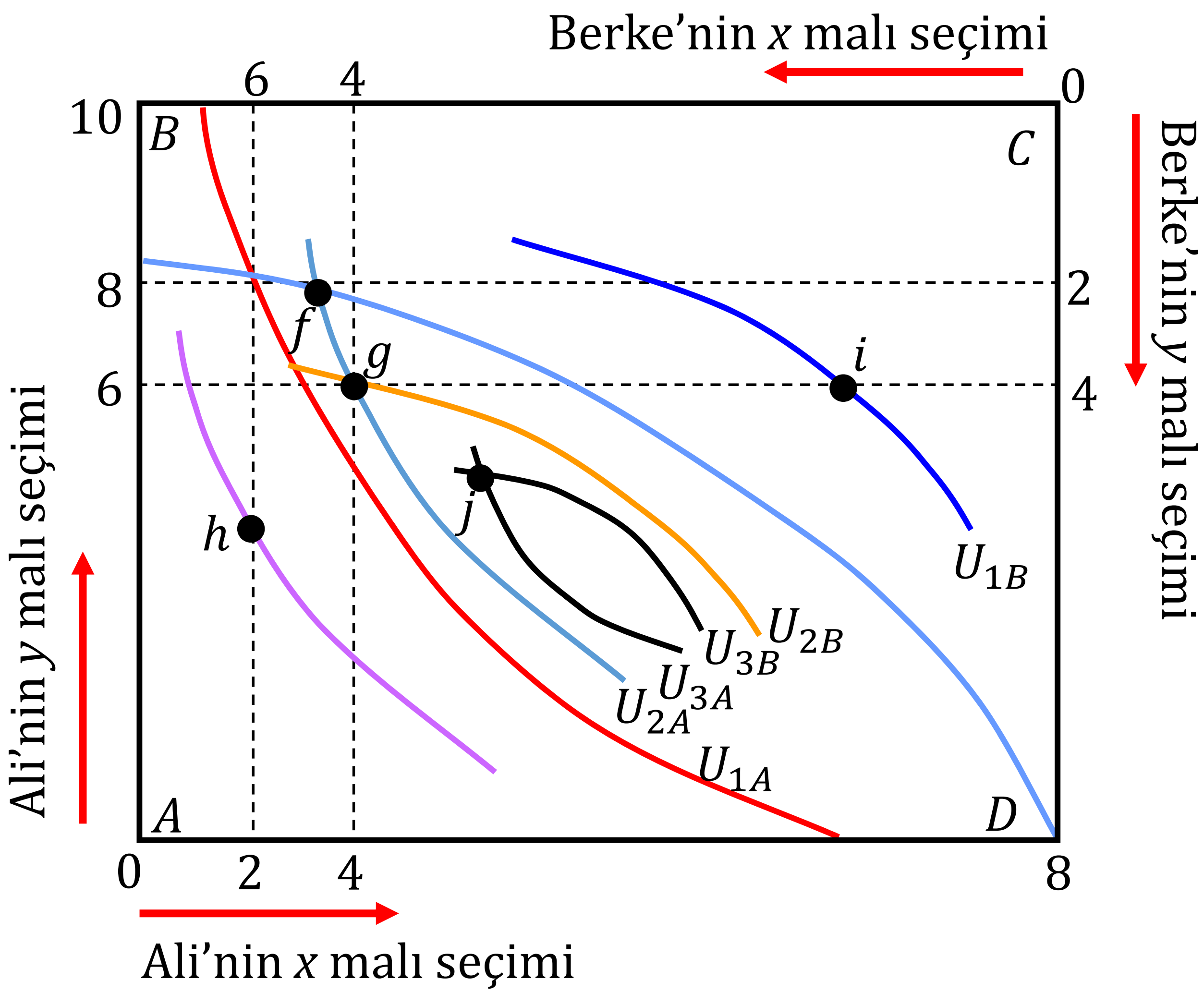
Örneğin e noktasında Ali'nin seçim demeti (x, y)=(3, 3), Berke'nin seçim demeti de (x, y)=(7, 5) 'tir. Böylesi bir durumda, ekonomideki toplam 8 x malı ile 10 y malı iki birey arasında bölüşülerek tüketilmektedir. Bu seçim, ekonomide var olan x ve y malı miktarlarına göre olanaklıdır. Örneğin f de olanaklı bir seçimdir.

Bu noktada şu soruyu soralım. Acaba her iki bireyin de refahını daha da iyileştiren seçim durumu olabilir mi? Böyle bir nokta varsa, bireyler bu seçimlere ulaşabilmek için, seçim demetlerini yeniden ayarlarlar. Eğer bireyler ulaştıkları bu noktada seçim demetlerini değiştirmek için hiçbir neden göremiyorlarsa, malların bireyler arasında dengeli dağıldığını söyleyebiliriz.

Şekil 64. Bireylerin Ayrı Ayrı Dengesi



Şekil 65. Bireylerin Eşanlı Dengesi ve Pareto Optimalite



Şekil 65'de her iki birey için de kayıtsızlık eğrileri kutuda yer almaktadır. Ali'nin kayıtsızlık eğrileri A harfiyle, Berke'nin kayıtsızlık eğrileri de B harfiyle belirtilmiştir. U_{1A} ve U_{1B} kayıtsızlık eğrilerinin kesiştikleri f noktasına göre her iki bireyde kendileri için daha yüksek fayda düzeyini gösteren ve aynı zamanda ekonomideki olanaklara göre yapılması mümkün mal demeti seçimi olan g noktasını tercih edeceklerdir. Benzer şekilde j noktasını g'ye tercih edeceklerdir. Bu şekilde hareket etmek, her ikisinin de yararınadır. Berke f'deyken, Ali h gibi bir noktada olmak istemeyecektir. Çünkü Ali'nin ulaşabilmesi olanaklı daha yüksek tüketim ve refah düzeyi f noktasıdır.

Yukarıdaki örnekte, ekonominin olanakları çerçevesinde her iki birey içinde çok sayıda seçimin yapılabileceğini gördük. Gerçekte bu seçimlerden hangisi yapılacaktır? Bunu belirleyebilmek için ek bir varsayıma ihtiyacımız olacaktır. Biz buna etkin seçim ya da *PARETO OPTİMAL* adını veriyoruz.

Pareto optimal ya da etkin seçim, her iki bireyin aynı anda durumunu en iyi yapan seçimdir. Eğer bir bireyin refahını azaltmadan diğerinin refahını artıramıyorsak, PARETO optimal durumdayızdır. Böyle bir durumda her ki bireyin kayıtsızlık eğrileri birbirine teğettir. Teğet noktasında her iki bireyin marjinal ikame oranı (MRS) eşittir.

Şimdi MRS'lerin eşit olmadığı bir durum (g noktası) varsayalım. g noktasında Ali'nin marjinal ikame oranı (MRS_A), Berke'nin marjinal ikame oranından (MRS_B) daha yüksektir. Örneğin şu sayısal durumu dikkate alalım:

$$MRS_A = \frac{4}{1} > \frac{3}{1} = MRS_B$$

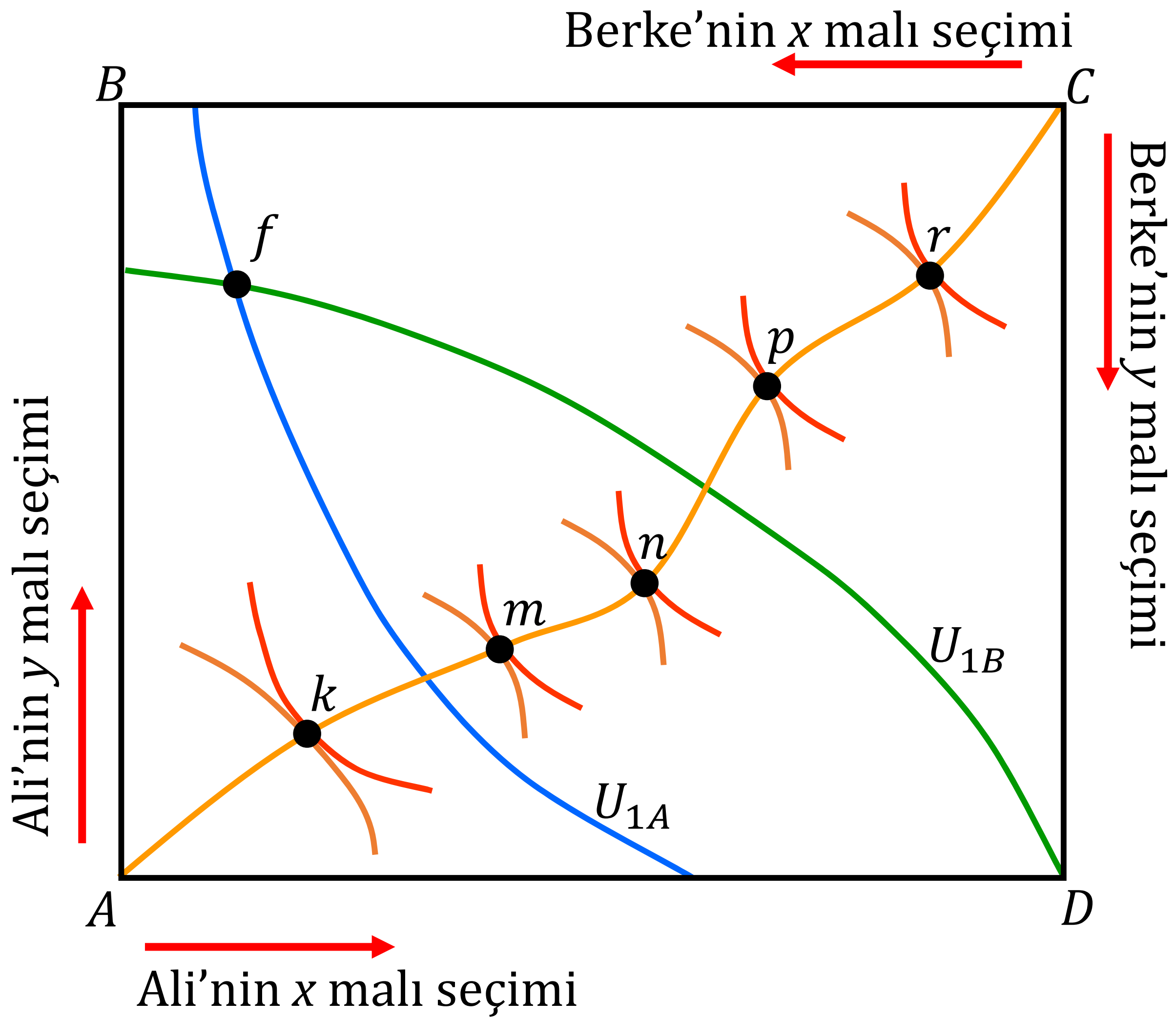
Bu eşitsizlik şunu söylemektedir: Ali 1 birim x malı tüketebilmek için, 4 birim y malından vazgeçmeye hazırdır. Berke ise 3 birim y malı tüketebilmek için, 1 birim x malından vazgeçmeye hazırdır. Böylesi bir mal değişimi hiç kimsenin başlangıçtaki durumunu değiştirmeyecektir.

Eğer Ali 1 birim x malı tüketebilmek için 3,5 birim y malından vazgeçerse, önceki durumundan daha iyi olacaktır. Aynı durum Berke için de geçerlidir. 3,5 birim y malı verip, 1 birim x malı alırsa, daha yüksek refah düzeyine ulaşır. Bu nedenle g noktası, etkin dağılımın olmadığı bir durumdur. Şekil 66'da, etkin tüketim demetlerinin her ki birey içinde oluştuğu durumlar gösterilmiştir.

Şekilde görüldüğü gibi k, m, n, p, r gibi her iki bireyin kayıtsızlık eğrilerinin teğet oldukları noktalar, etkin seçim ya da *Pareto* optimali göstermektedir. Bu noktaları birleştirdiğimizde ortaya çıkan eğriye, *sözleşme eğrisi* adını veriyoruz.

Şekil 2.41'de k, m, n, p, r noktalarının tümü etkin noktalar olmakla birlikte, k noktası Ali için, p ve r noktaları da Berke için rasyonel değildir. Ali bu durumda yeni seçimler yaparak daha yüksekteki refah düzeylerine ulaşabilir. Aynı durum Berke için de geçerlidir. Her iki birey için de optimal ve rasyonel seçim noktaları m ve n gibi noktalardır.

Şekil 66. Edgeworth Sözleşme Eğrisi ve Pareto Optimalite



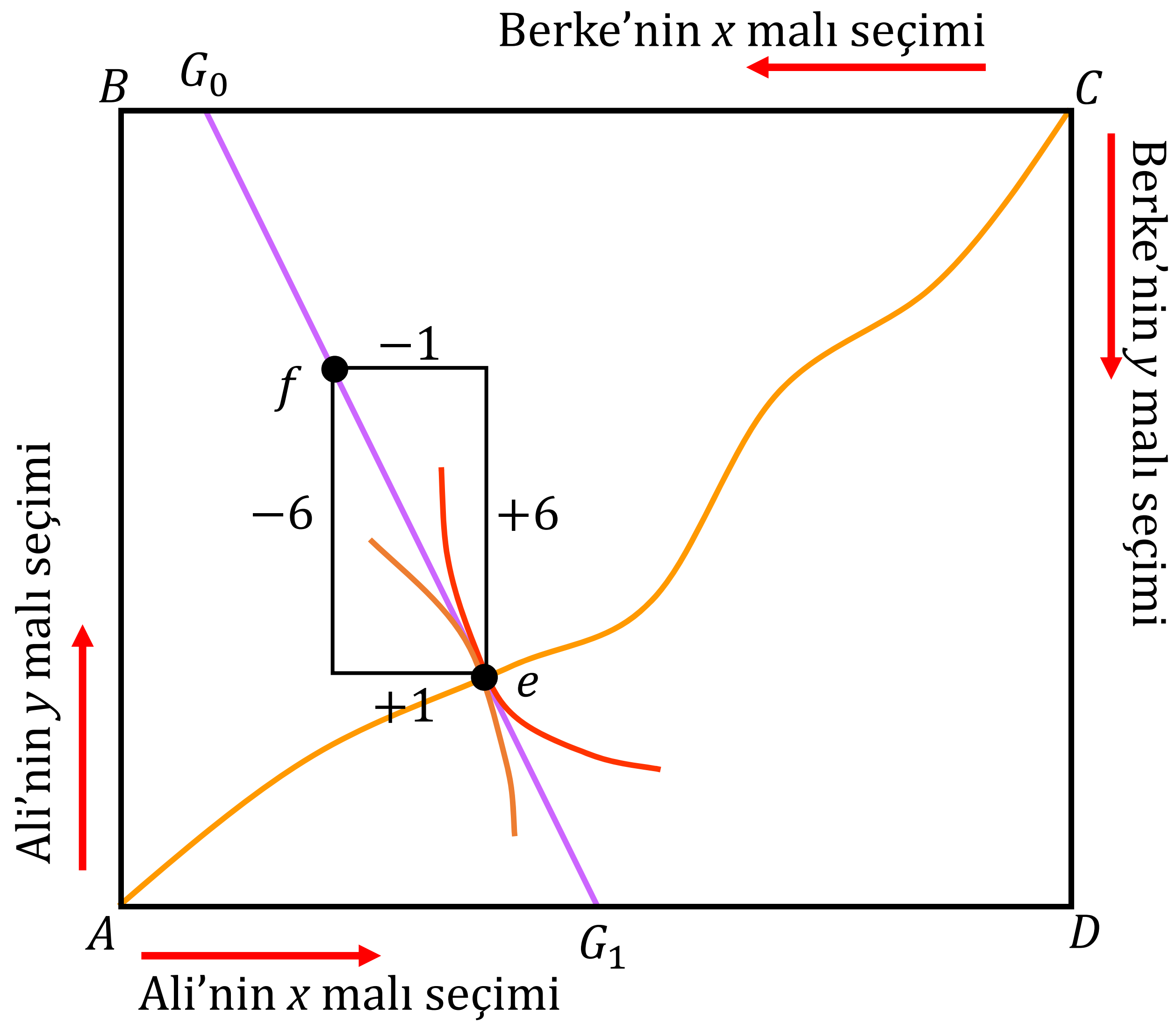
Bu noktalar, seçim değişikliği gerektirmeyen asıl alan (U_{1A} ile U_{1B}'nin sınırladığı alan) içinde kalmaktadır. Sözleşme eğrisinin hangi noktasında olunacağı, her iki bireyin de pazarlık gücüne bağlıdır. Bu analizde dikkat edilmesi gereken nokta, ekonomiyi yalnızca iki bireyin oluşturduğunun varsayılmış olmasıdır. Ekonomideki birey sayısını giderek artırırsak (teorik olarak sonsuza giderse), tam rekabetçi dengeli kaynak dağılımına geçmiş oluruz. Böyle bir durumda ekonomideki mal akışları, tam rekabetçi fiyat seti tarafından düzenlenecektir. Az sayıda bireyin yer aldığı bir modelde pazarlık süreci karşı karşıya gelinerek yürütülebilirken, çok sayıda bireyin yer aldığı bir modelde bu hemen hemen olanaksızdır.

Bu durumda tam rekabetçi piyasa altında belirlenen fiyatlar, bireylerin ne ölçülerde seçim yapabileceklerini (yani kaynak dağılımını) belirlemiş olacaktır. Bu durumda bireyler fiyat belirleyici değil, fiyatı veri alanlardır.

Çok sayıdaki bireyin her biri tam rekabetçi piyasa davranışı göstererek (yani fiyatlar setini veri kabul ederek), kendi faydasını maksimize edecek olan mal demetinin seçimini yapar. Çok sayıda bireyin arasından alacağımız iki örnek bireyle (Ali ve Berke) bunu görebiliriz. Şekil 67'de, tam rekabetçi yapı altındaki seçimin nasıl yapıldığını göstermektedir.

Şimdi her iki bireyin de 1 birim *x* malı tüketmek için 6 birim *y* malından vazgeçmeye razı olduğunu varsayalım. Bu durumda her iki birey de arz ve talebini değiştirmek istemeyecektir. G_0G_1 doğrusu, her iki kayıtsızlık eğrisinin teğet olduğu noktadan, bu kayıtsızlık eğrilerine teğet olacak şekilde geçmektedir. Dolayısıyla kayıtsızlık eğrilerinin eğimiyle (marjinal ikame oranları), göreli fiyatlar birbirine eşittir.

Şekil 67. Tam Rekabetçi Piyasada Seçim ve Pareto Optimalite



G_0G_1 doğrusunun eğimi, x ve y mallarının göreli fiyatlarını göstermektedir. Bu şekle göre G_0G_1 eğimi -6'dır. Bu göreli fiyat, her iki birey için de veridir ve tam rekabetçi piyasada oluşmuştur. Bireyler bu fiyatlardan seçecekleri x ve y malı miktarlarıyla faydalarını maksimize edeceklerdir.

Yukarıdaki analizlerde Pareto optimalin tanımını şöyle vermiştik. Tam rekabetçi bir ekonomik yapıda bireylerden birinin refahını iyileştirmek için diğerinin refah düzeyinin azaltılması gerektiği kaynak dağılımı Pareto optimaldir. Bu anlamda Edgeworth sözleşme eğrisi, tüm Pareto optimal seçimleri göstermektedir. Aşağıda matematiksel analiz yapabilmek için iki malın ve iki bireyin yer aldığı basit bir ekonomi varsayılmıştır. İkinci bireyin fayda düzeyi ile her iki bireyin bütçe kısıtları biliniyorken, birinci bireyin faydasını maksimize eden seçim düzeyi belirlenecektir.

Problem şöyledir :

Amaç Fonksiyonu: $Max_{(q_1^A, q_2^A)} U_A(q_1^A, q_2^A)$

Kısıt Fonksiyonları: $U_B(q_1^B, q_2^B) = U_0$

$$q_1^A + q_1^B = w_1$$

$$q_2^A + q_2^B = w_2$$

Bu problemin Lagrange fonksiyonu:

$$Z\left(q_1^A, q_2^A, q_1^B, q_2^B\right) = U_A\left(q_1^A, q_2^A\right) + \lambda[U_0 - U_B(q_1^B, q_2^B)]$$
$$+\mu_1[w_1 - q_1^A - q_1^B] + \mu_2[w_2 - q_2^A - q_2^B]$$

Maksimizasyon için birinci sıra koşulları belirleyelim:

$$\frac{\partial Z}{\partial q_1^A} = \frac{\partial U_A}{\partial q_1^A} - \mu_1 = 0 \quad , \quad \frac{\partial Z}{\partial q_2^A} = \frac{\partial U_A}{\partial q_2^A} - \mu_2 = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial q_1^B} = -\lambda \frac{\partial U_B}{\partial q_1^B} - \mu_1 = 0 \quad , \quad \frac{\partial Z}{\partial q_2^B} = -\lambda \frac{\partial U_B}{\partial q_2^B} - \mu_2 = 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial U_A/\partial q_1^A}{\partial U_A/\partial q_2^A}}_{MRS_A} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \underbrace{\frac{\partial U_B/\partial q_1^B}{\partial U_B/\partial q_2^B}}_{MRS_B}$$

Aşağıda A ve B bireylerinin fayda fonksiyonları verilmiştir. EDGEWORTH sözleşme eğrisini bulalım.

$$U_A(q_1^A, q_2^A) = q_1^A q_2^A \quad , \quad U_B(q_1^B, q_2^B) = q_1^B q_2^B$$

$$q_1^A + q_1^B = w_1 \quad , \quad q_2^A + q_2^B = w_2$$

Bu problemin Lagrange fonksiyonu :

$$Z(q_1^A, q_2^A, q_1^B, q_2^B) = q_1^A q_2^A + \lambda[U_0 - q_1^B q_2^B] + \mu_1[w_1 - q_1^A - q_1^B] + \mu_2[w_2 - q_2^A - q_2^B]$$

Maksimizasyon için birinci sıra koşulları belirleyelim:

$$\underbrace{q_1^A = \mu_2 \quad , \quad q_2^A = \mu_1 \quad , \quad -\lambda q_1^B = \mu_2 \quad , \quad -\lambda q_2^B = \mu_1}$$

$$\frac{q_1^A}{q_2^A} = \frac{q_1^B}{q_2^B}$$

Buradan q_1^B ve q_2^B terimlerini yok eder, ürün kısıt fonksiyonlarındaki yerlerine yazarak, sözleşme eğrisini elde ederiz.

$$\left.\begin{array}{l} q_1^A + q_1^B = w_1 \\ q_2^A + q_2^B = w_2 \end{array}\right\} \quad \frac{q_1^B}{q_2^B} = \frac{w_1 - q_1^A}{w_2 - q_2^A} = \frac{q_1^A}{q_2^A} \quad \rightarrow \quad \boxed{q_2^A = \frac{w_2}{w_1} q_1^A} \longrightarrow \text{Edgeworth Sözleşme Eğrisi}$$

ÜRETİM

TEORİSİ

Bir girişimde bulunulan işin maliyeti, o işi yapmak için vazgeçilen diğer işlerin getirisiyle ölçülür. Buna *fırsat maliyeti* diyoruz. Örneğin bir girişimci meyve toplama işinin 1 saatinden 7,60 TL kazanabileceğini varsayalım. Dolayısıyla bu kişi reçel yapımıyla uğraşırsa, her bir saat için meyve toplama işinin fırsat maliyeti 7,60 TL olacaktır. Eğer bu kişi her hafta pazartesi sabahı 5 saat reçel üretirse, toplam fırsat maliyeti 38 TL olur. Girişimci birey haftanın geri kalan günlerinde reçel yapımında kullanılmak üzere meyve toplayabilir. Bu durum yatırımın özünü oluşturur.

Diğer yandan birey sermaye piyasasından bir haftalık süre için 38 TL borçlanarak, Pazartesi günü gerçekleştirdiği reçel yapımını, haftanın diğer günleri meyve toplamaksızın finanse edebilir. Yani meyve piyasasından 38 TL meyve satın alır. Ancak bir hafta sonra, aldığı borcu faiziyle birlikte geri ödemek zorundadır.

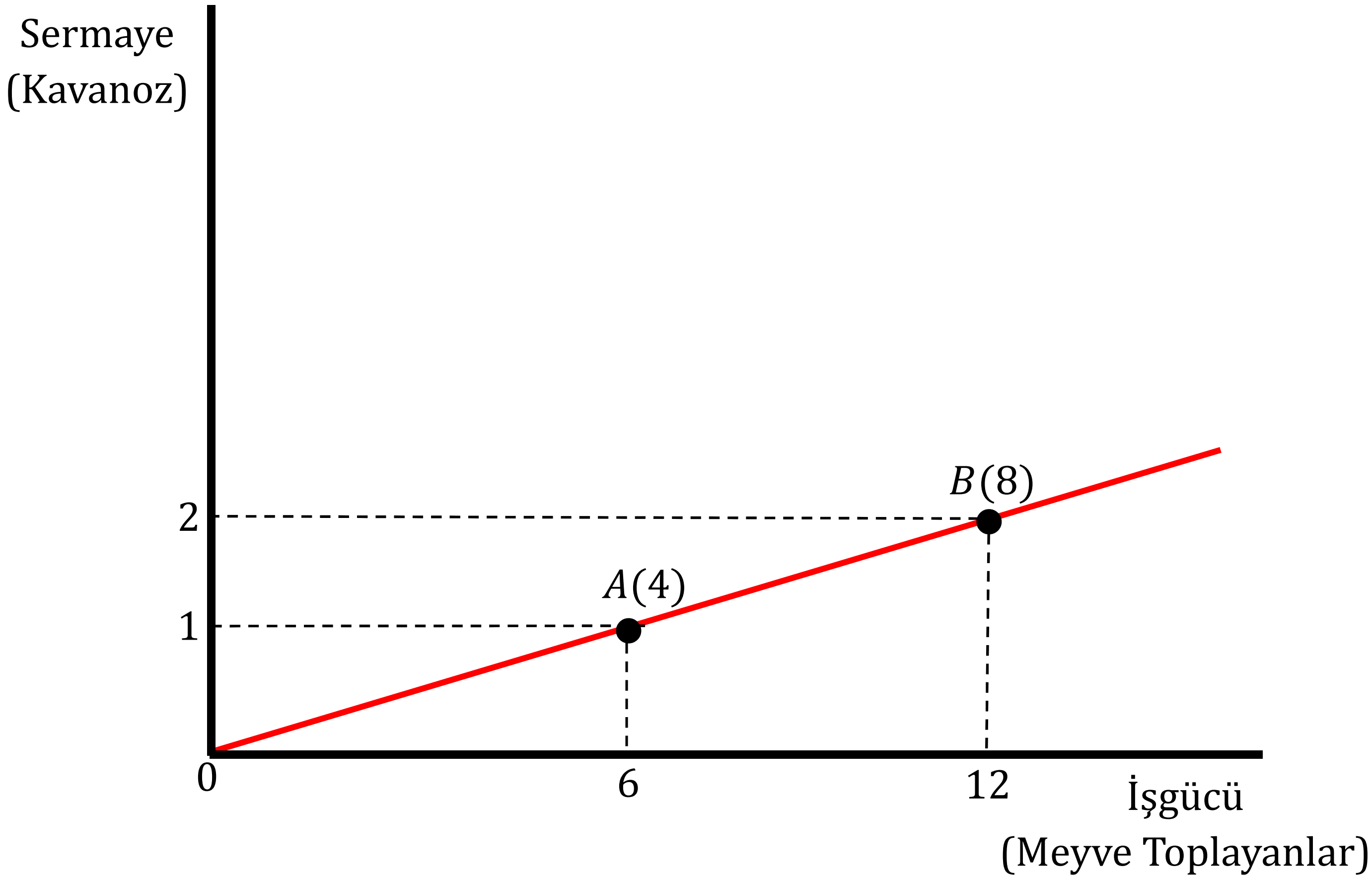
Eğer reçel üreticisi birey bir işletme kurmak isterse, meyve toplama işinden haftada 190 TL gelir elde edebilir. Bu parayı kazanmadıkça da, girişimi başlatmaz.

Bu gelir, reçel yapımı, meyve ve diğer üretim giderlerini karşılamaktadır. Bu nedenle 190 TL reçel üretim işinin toplam fırsat maliyetidir. Biz kavrama aynı zamanda *normal kâr* adını da veriyoruz. Bu gelirin üzerindeki herhangi bir kâr, aşırı kâr olarak tanımlanmaktadır.

Örnek girişimcinin 45 cm^3 kavanoz ve 6 meyve toplayıcısıyla haftada ortalama 4 kilo reçel ürettiğini varsayalım. Ayrıca üretimdeki bu girdileri iki katına çıkarttığında, üretim miktarının da (çıktı) iki kat arttığını kabul edelim. Bu üretim süreci Şekil 68'de gösterilmiştir.

Birinci durumda 1 birim sermaye-6 birim işgücü kullanılarak, 4 birim reçel üretilmiştir. Aynı şekilde ikinci durumda 2 birim sermaye-12 birim işgücü kullanılarak, 8 birim reçel üretilmiştir. Her iki üretim sürecinde kullanılan sermaye-işgücü oranı 1/6'dır. Her iki üretim sürecinde sermaye-işgücü oranı sabit kaldığından, biz bu üretim sürecini *doğrusal* olarak tanımlıyoruz. Bundan sonra sermayeyi K, işgücünü de L harfleriyle gösterelim.

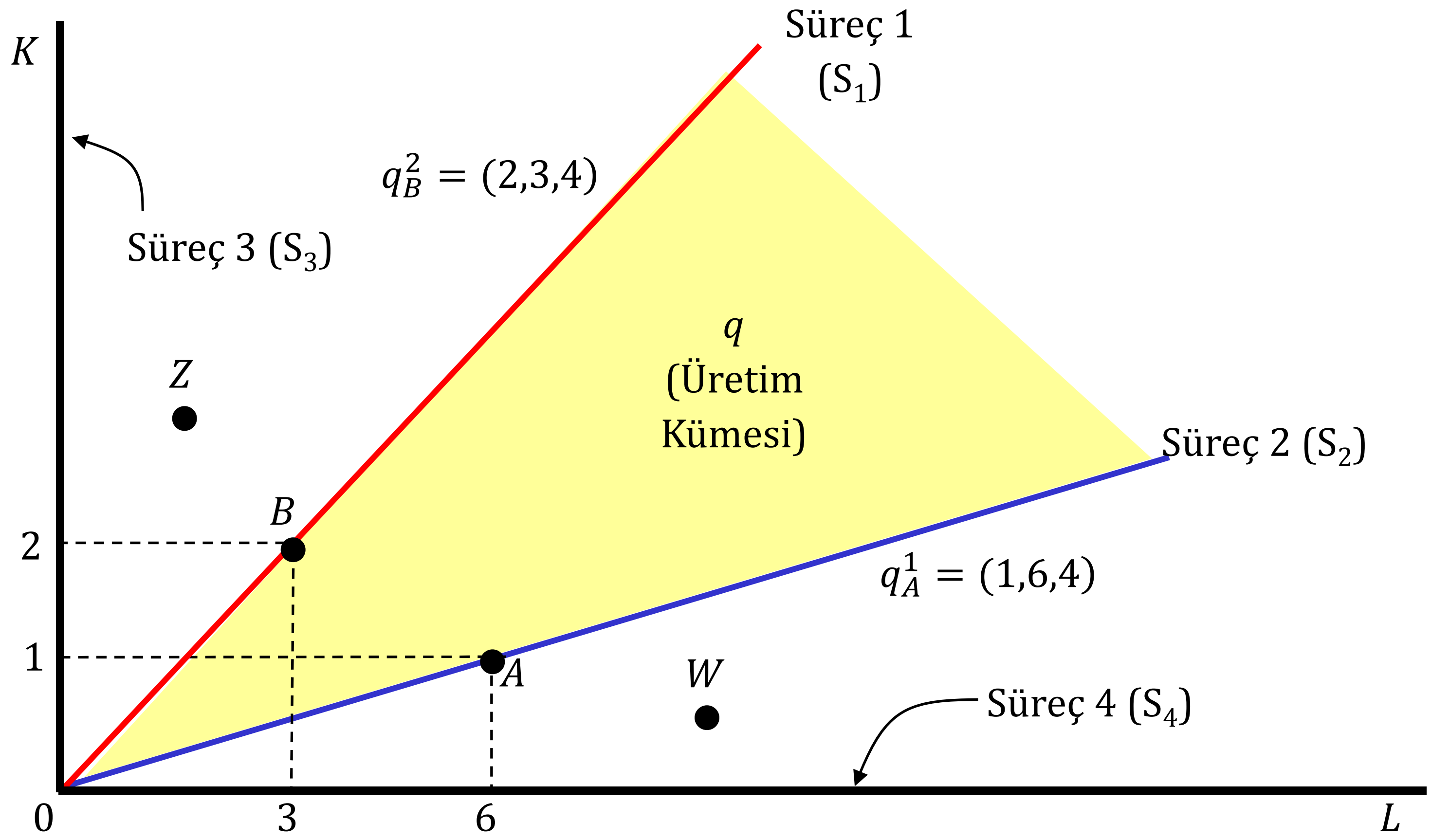
Şekil 68. Üretim Tekniği



Reçel üreticisi için 2 farklı üretim tekniğini kullanabilme olanağının bulunduğunu varsayalım. Ayrıca Şekil 69'da 3 ve 4 süreçleri de gösterilmiştir. Ancak bu süreçler yapılabilir değildir. Kavanoz olmaksızın yalnızca meyveyle ve meyve olmaksızın yalnızca kavanozla reçel üretilemez. Dolayısıyla hem işgücü hem de sermayeye birlikte ihtiyaç vardır. Şekilde S_2 işgücü yoğun, S_1 de sermaye yoğun üretim süreçlerini göstermektedir.

Üretim Tekniği, belirli bir ürünün üretilebilmesine olanak sağlayan tüm üretim süreçlerini kapsar. Olanaklı tüm üretim süreçleri, üretim kümesi olarak adlandırılmaktadır. Yukarıdaki şekilde kırmızı doğularla gösterilen iki üretim sürecinin (vektörünün) arasında çok sayıda yapılabilir teknoloji vardır. Örneğin $q_A^1 = (1,6,4)$ ve $q_B^2 = (2,3,4)$. W ve Z yapılabilmesi olanaklı olmayan durumları göstermektedir.

Şekil 69. Üretim Tekniği Seçenekleri



Üretim Tekniği, belirli bir ürünün üretilebilmesine olanak sağlayan tüm üretim süreçlerini kapsar. Olanaklı tüm üretim süreçleri, üretim kümesi olarak adlandırılmaktadır. Yukarıdaki şekilde kırmızı doğularla gösterilen iki üretim sürecinin (vektörünün) arasında çok sayıda yapılabilir teknoloji vardır. Örneğin $q_A^1 = (1,6,4)$ ve $q_B^2 = (2,3,4)$. W ve Z yapılabilmesi olanaklı olmayan durumları göstermektedir.

Bir olanaklı üretim kümesinin tanımlanabilmesi için, teknolojiyle ilgili şu varsayımların yapılması gereklidir.

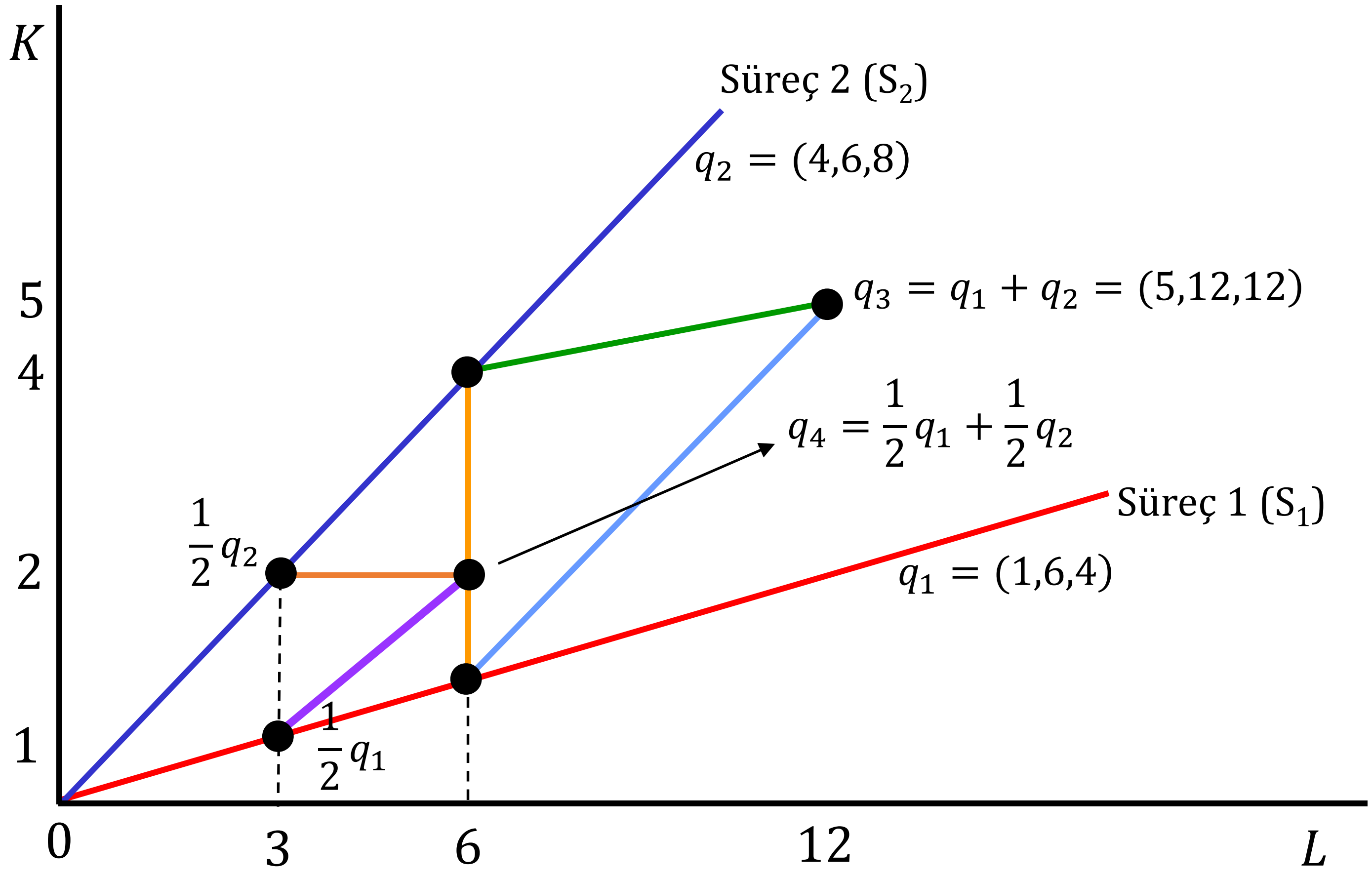
1. q üretim kümesinde, $y_K > 0, y_K > 0, b > 0$'dır. Yani girdi kullanmazsak, çıktı elde edemeyiz: $q = (q_K, q_L, b)$

2. Üretim süreci tersine çevrilemez. Yani 1 birim sermaye, 6 birim işgücü kullanarak 4 kilo reçel üretiyorsak, 4 kilo reçeli 1 birim işgücü, 6 birim sermaye biçimine dönüştüremeyiz.

3. q_1 ve q_2 üretim yöntemlerini yapılabilir ise, $q_1 + q_2 = q_3$ yöntemi de yapılabilir. Buna toplanabilirlik özelliği diyoruz. Şekil 70 bunu göstermektedir.

4.Belirli bir girdi miktarıyla, belirli bir miktar ürün elde edebiliyorsak, girdileri λ oranında kullandığımızda, λ oranında üretim elde edebiliriz. Buna bölünebilirlik adını veriyoruz.

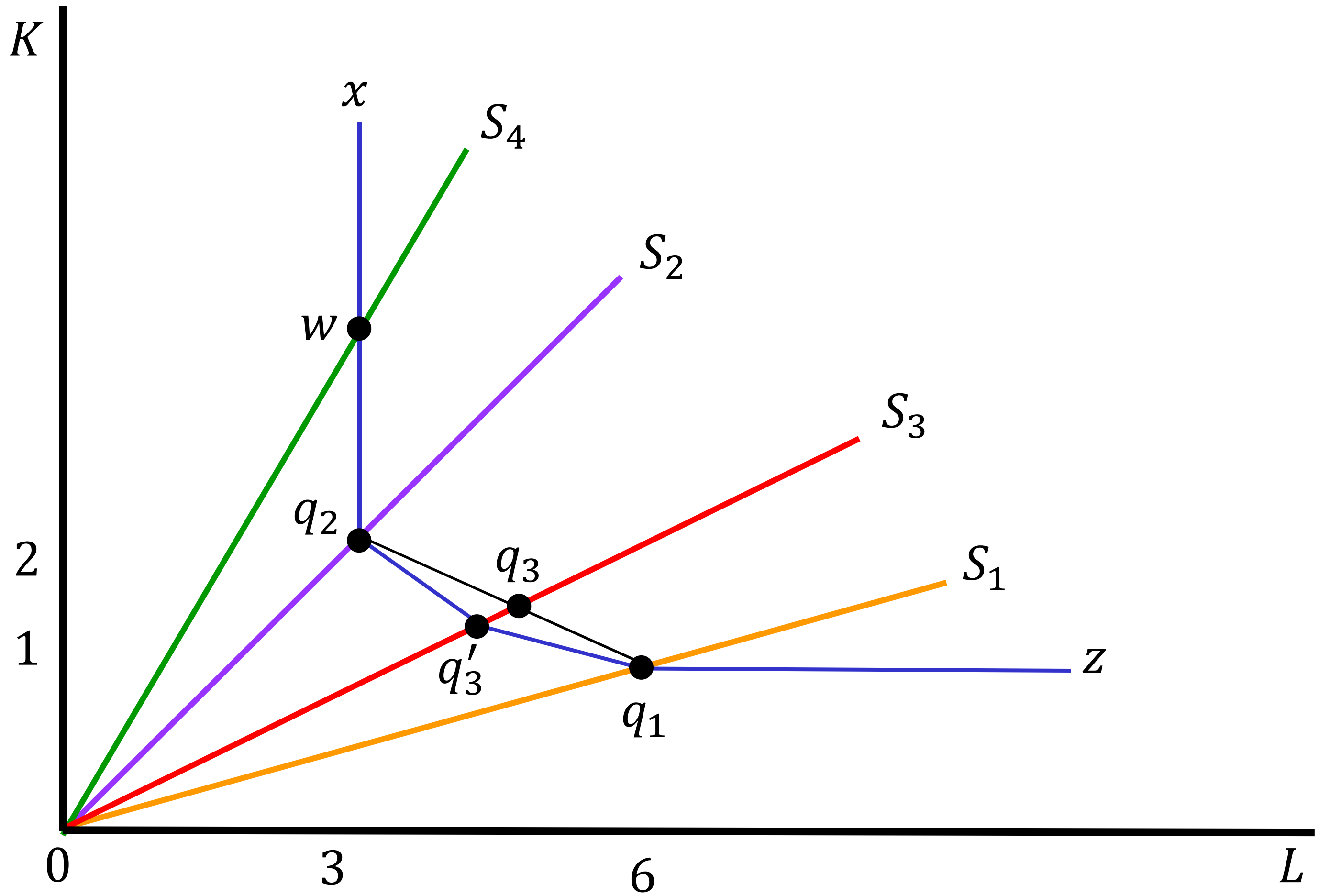
Şekil 70. Üretim Tekniklerinde Toplanabilirlik



5. q_1 ve q_2 yöntemleri tam çalışma halinde yapılabilir ise, çalışma sürecinin belirli bölümünde q_1, geri kalan bölümünde q_2 yapılabilir yöntemlerdir. Buna *konvekslik* (dışbükeylik) özelliği diyoruz. Örneğin yukarıdaki şekilde q_1 yöntemi, tam çalışmanın yarısında q_1, diğer yarısında da q_2 yöntemi ile edilmektedir.

Şekil 71'de S_1 ve S_2 üretim yöntemleri, üretim kümemizin sınırlarını çizmektedir. Şimdi orijin noktasından başlayarak S_1 üzerinde 4 birim ürün düzeyine kadar (q_1) ilerleyelim. Aynı işlemi S_2 üzerinde de yapalım (q_2). q_1, S_1 üretim yöntemi kullanıldığında 4 birim ürün elde etmenin teknolojik olarak en etkin yoludur. q_1'in altında 4 birimden az, üstünde de fazla ürün elde ederiz. Dolayısıyla *etkin üretim*, veri üretim düzeyini en az girdiyle elde etmektir.

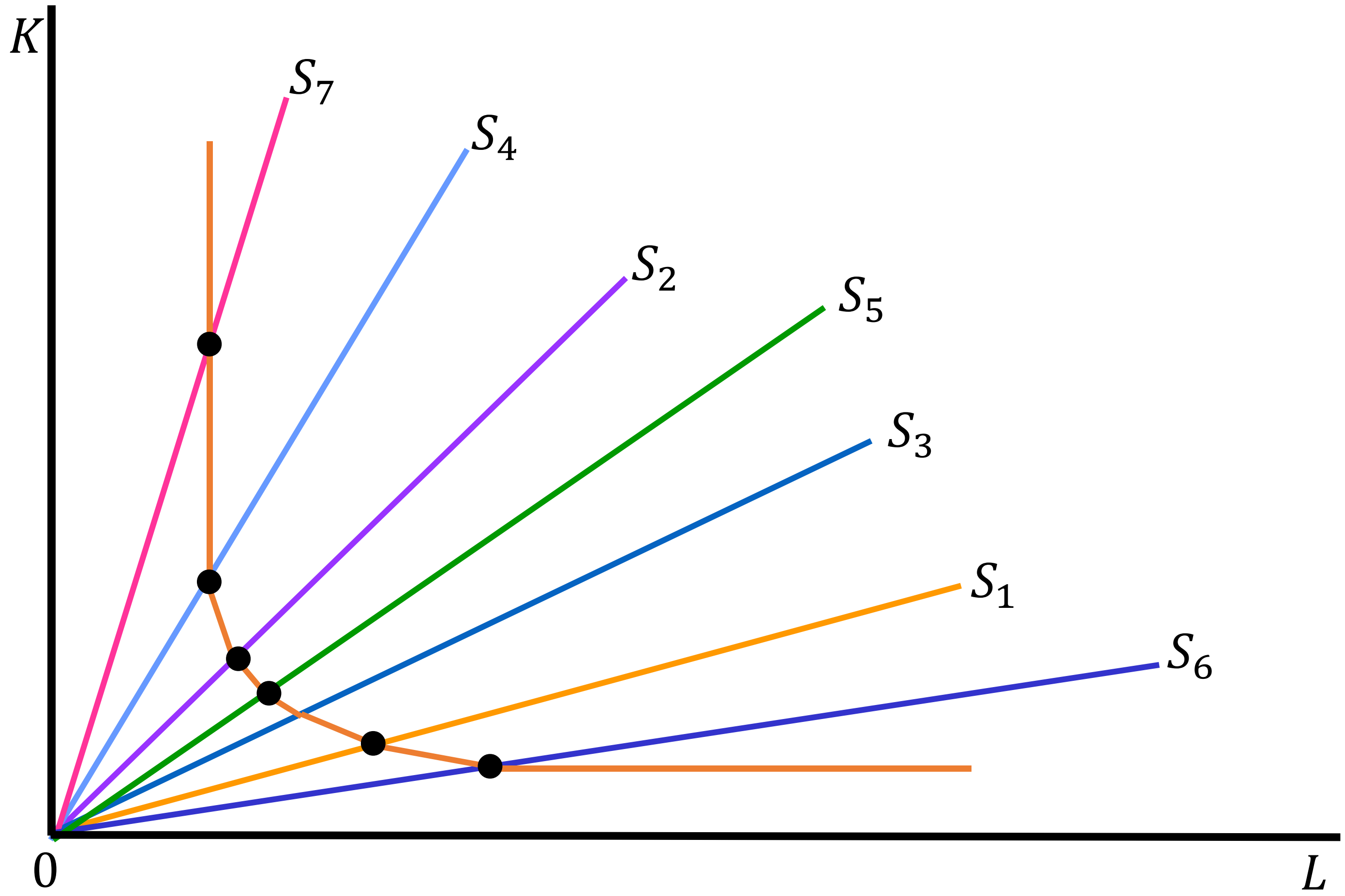
Şekil 71. Etkin Üretim Teknikleri



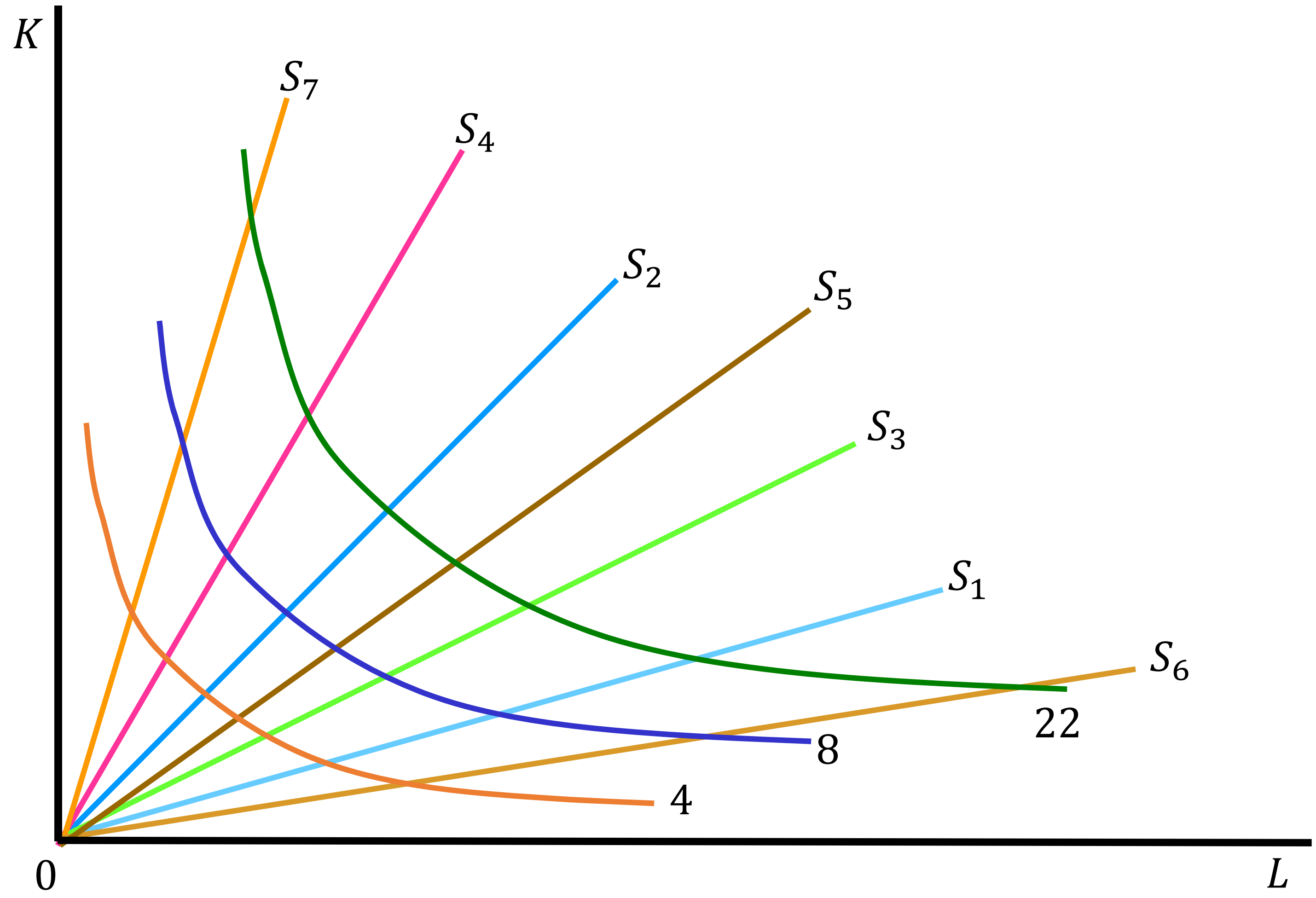
Benzer şekilde her üretim yönteminde 4 birim ürün noktasını işaretleriz. Bu noktaların birleştirilmesiyle oluşan eğriye, *eş-ürün eğrisi* adını veriyoruz. eş-ürün eğrisinin q_2 noktasın-dan sonra tam dik olduğuna dikkat edelim. Yani işgücü girdisini 3 birimde sabit tutarsak, üretime katılan her ek işgücü 4 birimden daha fazla üretim yapılmasını sağlamaz. Benzer durumu q_1 noktasının sağ tarafı içinde söyleyebiliriz.

Bir önceki şekilde yer alan olanaklı üretim yöntemleri sayısını giderek artıralım. Yeni üretim yöntemleri, sermaye ve işgücü arasında yeni ikame olanaklarının ortaya çıkmasını sağlar. Çok sayıdaki üretim yönteminin her birinde 4 birimlik üretim düzeyini aynı şekilde işaretler ve birleştirirsek, eş-ürün eğrisindeki dirsek sayısının giderek arttığını ve hatta yöntem sayısını sonsuza götürdüğümüzde, eş-ürün eğrisinin düzgün bükülen bir konveks eğriye dönüştüğünü görebiliriz.

Şekil 72. Olanaklı Üretim Teknikleri ve eş-ürün Eğrisi



Şekil 73. Olanaklı Üretim Teknikleri ve eş-ürün Eğrisi



Düzgün bir hareket çizen eş-ürün eğrisi, sürekli ve her yerde türevi alınabilir özelliğe sahiptir. Bu şekildeki bir eş-ürün eğrisinin üzerinde, aynı miktar üretim yapabilmek için sonsuz tane sermaye-işgücü bileşimini kullanmak olanaklıdır. Yukarıda bu özellikleri taşıyan bir grup eş-ürün eğrisi yer almaktadır. Bu eş-ürün eğrileri, ilgili malı üretmek için kullanılabilecek mevcut teknolojileri tanımlamakta ve veri bir üretim düzeyini gerçekleştirebilmenin en etkin yolunu göstermektedir.

Aynı zamanda eş-ürün eğrileri, veri girdilerle, en yüksek ürün miktarının elde edilebileceğini de göstermektedirler. Bu şekildeki bir grup eş-ürün eğrisince belirlenen *üretim fonksiyonu*, veri girdilerle en yüksek ürün miktarının elde edilebileceğini tanımlamaktadır.

$$Çıktı=f(Girdi_1 , Girdi_2)$$

Eş-ürün eğrileri bir çok noktada kayıtsızlık eğrilerine benzemektedir. Kayıtsızlık eğrileri, bireyin tüketim tercihlerini, eş-ürün eğrileri de bir üreticinin üretim tekniği olanaklarını gösterir. Ancak kayıtsızlık eğrilerinin endeks sayıları tercihteki sıralamayı göstermesine karşın, eş-ürün eğrilerinin endeks sayıları ise gerçek çıktı miktarını gösterir.

Eş-ürün eğrilerinin şu özelliklerini sayabiliriz :

1. Negatif eğimlidir.
2. Orijine göre konvekstir.
3. Birbirleriyle kesişmezler.
4. Orijinden uzaklaştıkça, daha yüksek üretim düzeyini gösterirler.

Eş-ürün eğrisinin eğimi, marjinal teknik ikame oranı ($MRTS$) ile ölçülür. $MRTS$, üretim düzeyi aynı kalmak koşuluyla girdilerden birini Δ birim daha fazla kullanmak istediğimizde, diğer girdiden ne ölçüde vazgeçmemiz gerektiğini tanımlar.

$$MRTS_{KL} = -\frac{\Delta K}{\Delta L}$$

Diğer bir ifadeyle, sermaye ile işgücünün birbirlerini ne ölçüde ikame ettiklerini gösterir. Negatif eğimli bir eş-ürün eğrisinde $MRTS$ negatif değere sahiptir. Orijine göre konveks (dışbükey) bir eş-ürün eğrisi üzerinde $MRTS$'nin mutlak değeri yukarıdan aşağıya inildikçe azalır. Marjinal teknik ikame oranını, sermaye ve işgücünün marjinal verimliliklerinin birbirine oranı olarak da tanımlayabiliriz.

$$MRTS_{KL} = -\frac{\Delta K}{\Delta L} = -\frac{\Delta q/\Delta L}{\Delta q/\Delta K} = \frac{MP_L}{MP_K}$$

Bir girdinin marjinal verimliliğini şöyle tanımlayabiliriz: Girdilerden biri sabitken, diğerinin Δ birim artışı karşısında, üretimde meydana gelen Δ birimlik değişmedir. Sermayenin ve işgücünün marjinal verimliliklerini şöyle yazabiliriz:

$$MP_K = \frac{\Delta q}{\Delta K} \quad , \quad MP_L = \frac{\Delta q}{\Delta L}$$

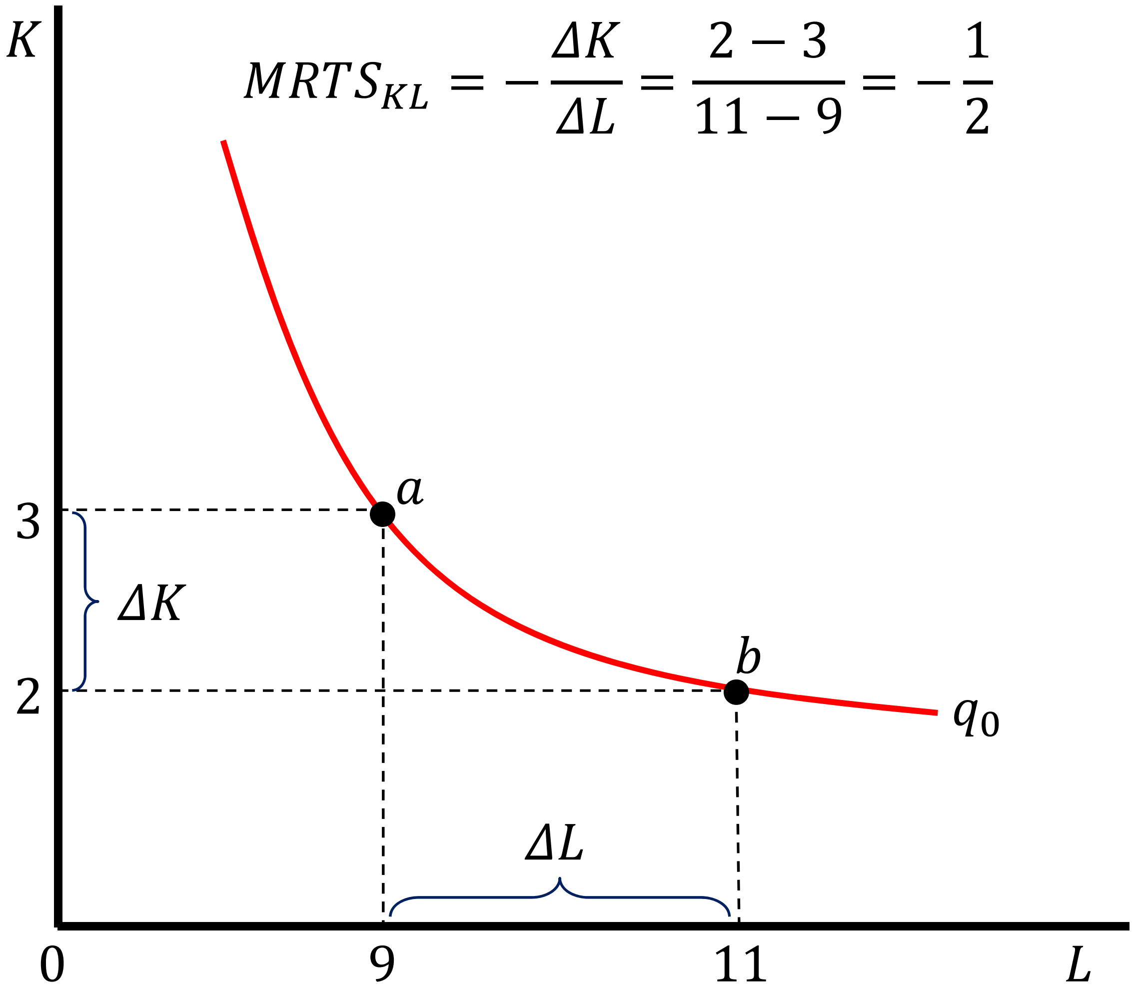
Sermayenin marjinal verimliliğini $\Delta q/\Delta K$ olarak yazdık. Sermayenin değişimini sonsuz küçüklükte yaparsak, marjinal verimliliği yeniden şu biçimde tanımlamamız gerekir.

$$MP_K = \lim_{\Delta K \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta K} = \frac{\partial q}{\partial K} \quad , \quad MP_L = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta L} = \frac{\partial q}{\partial L}$$

Buna göre $MRTS_{KL}$'yi de yeniden tanımlayalım.

$$MRTS_{KL} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{\partial q/\partial L}{\partial q/\partial K}$$

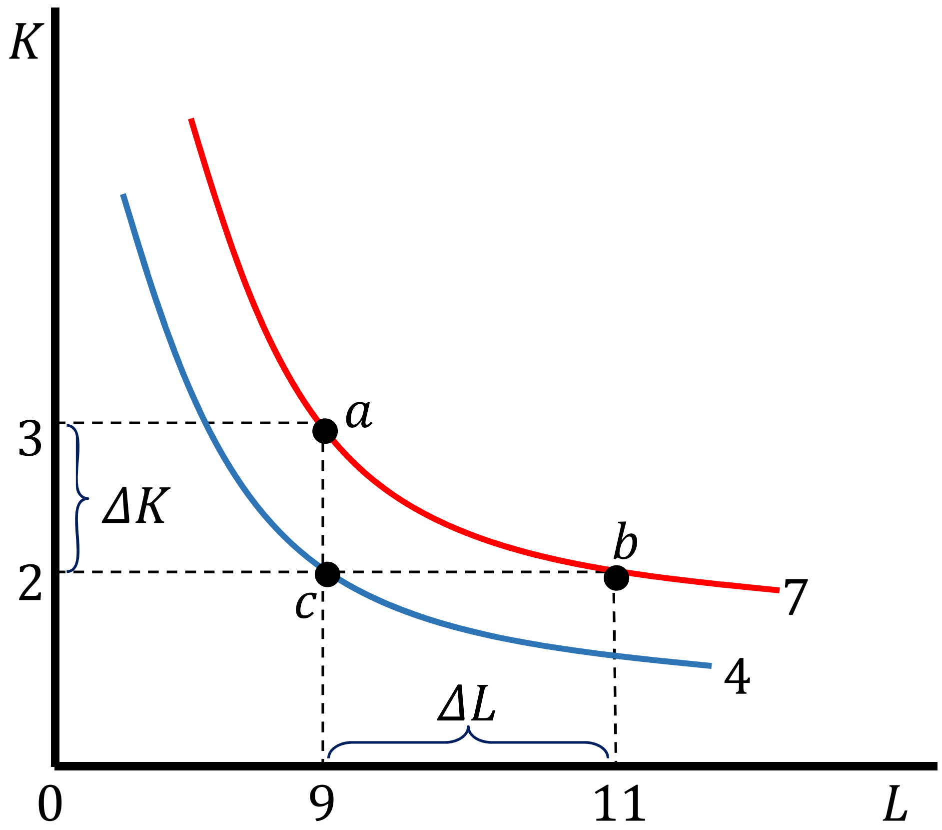
Şekil 74. Marjinal Teknik İkame Oranı



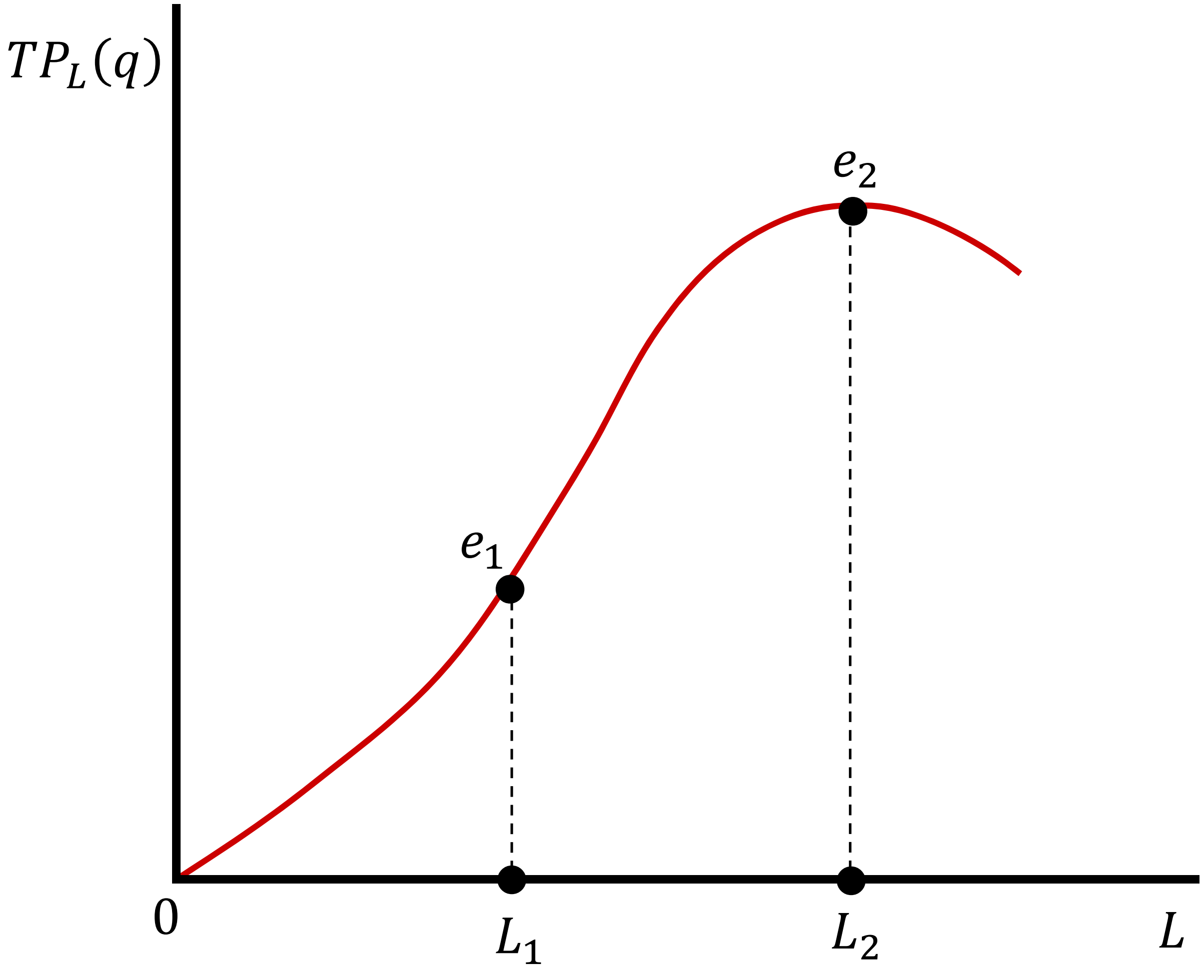
Şekil 75. Marjinal Verimlilik

$$MP_K = \frac{\Delta q}{\Delta K} = \frac{7-4}{3-2} = 3$$ L'yi sabit tutuyoruz.

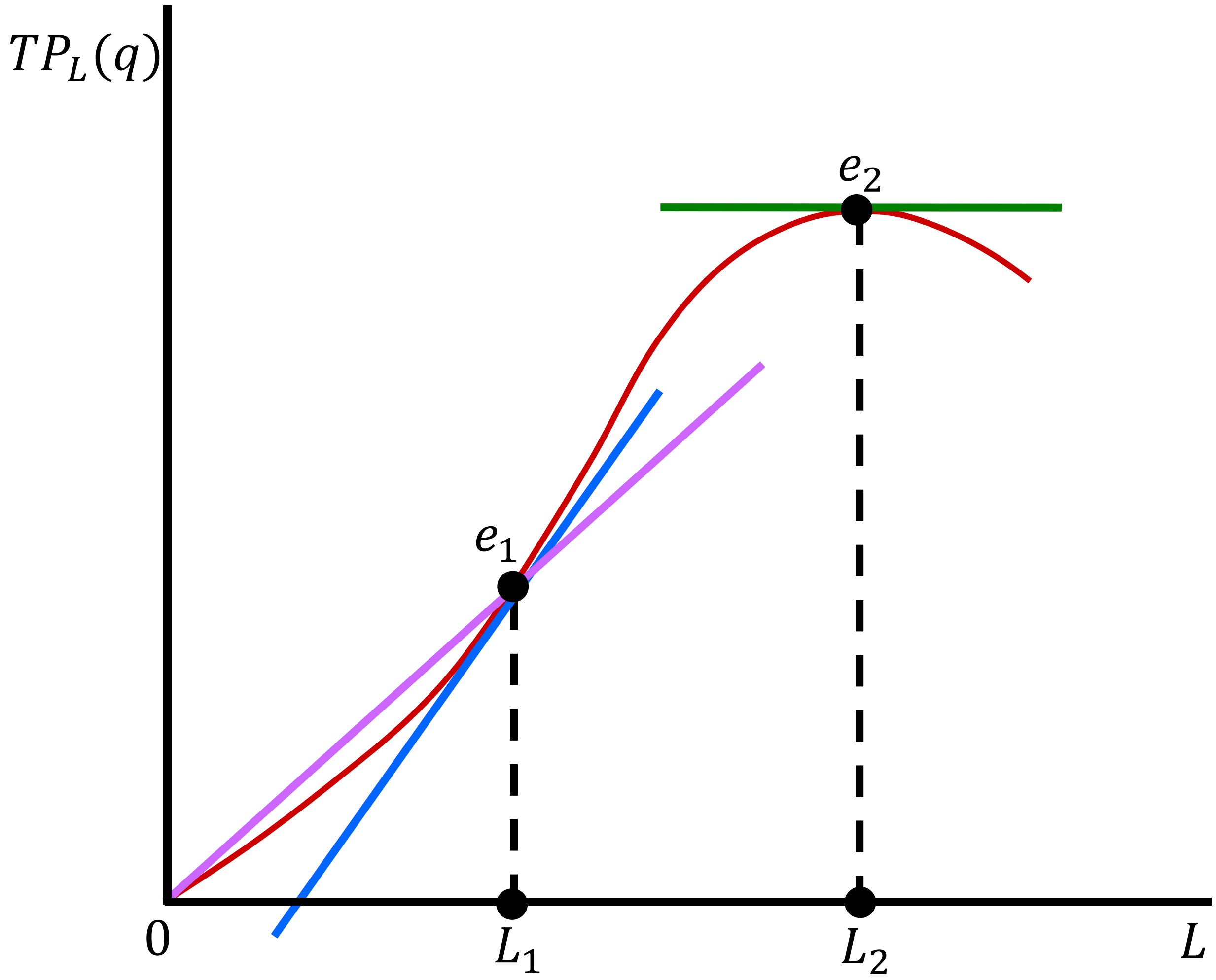
$$MP_L = \frac{\Delta q}{\Delta L} = \frac{7-4}{11-9} = \frac{3}{2}$$ K'yi sabit tutuyoruz.



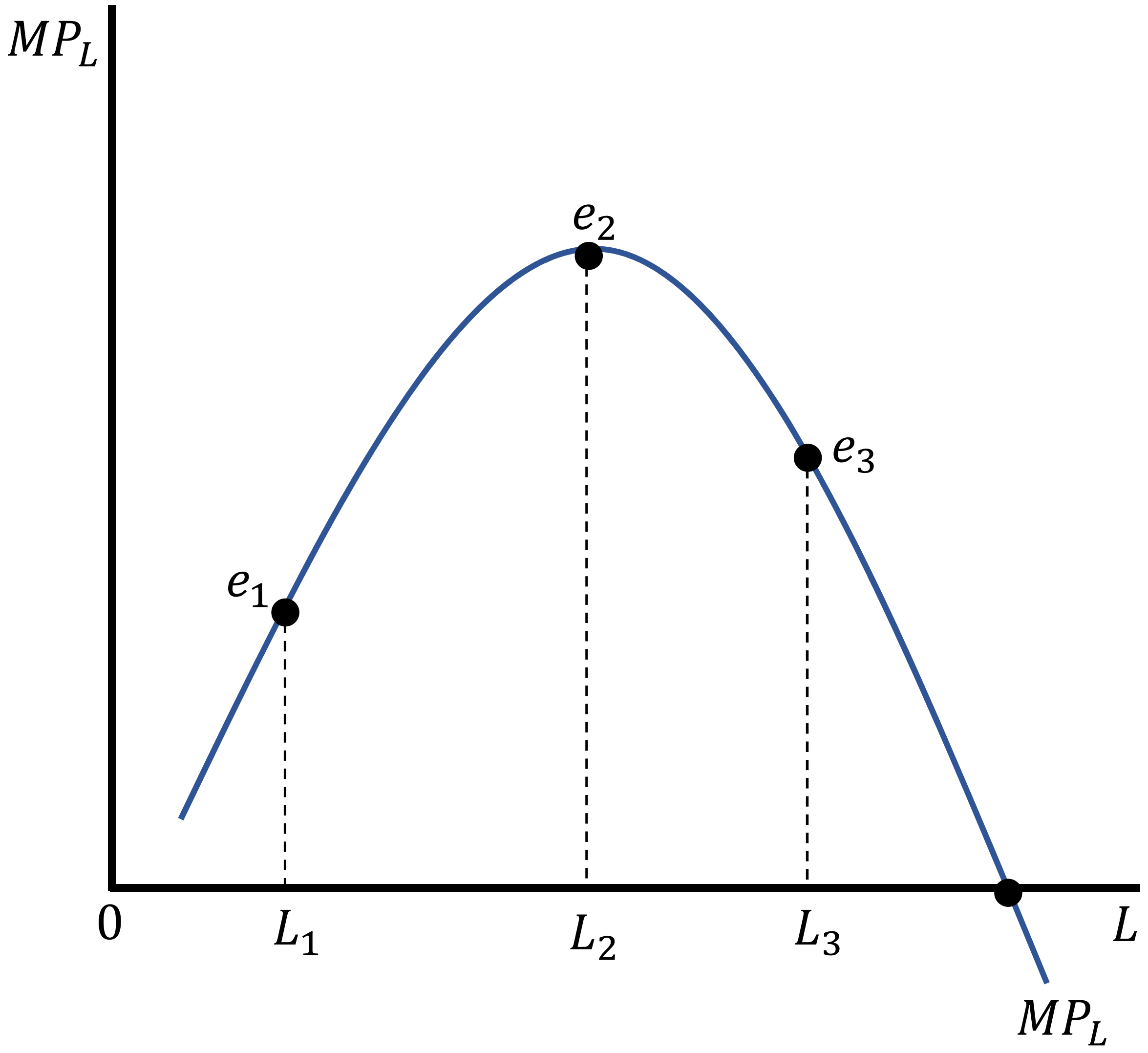
Şekil 76. Üretim Fonksiyonu



Şekil 77. Üretim Fonksiyonu ve Marjinal ve Ortalama Verimliliklerin Belirlenmesi



Şekil 78. Marjinal Verimlilik Eğrisi



$$MP_L = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta L} = \frac{\partial q}{\partial L}$$

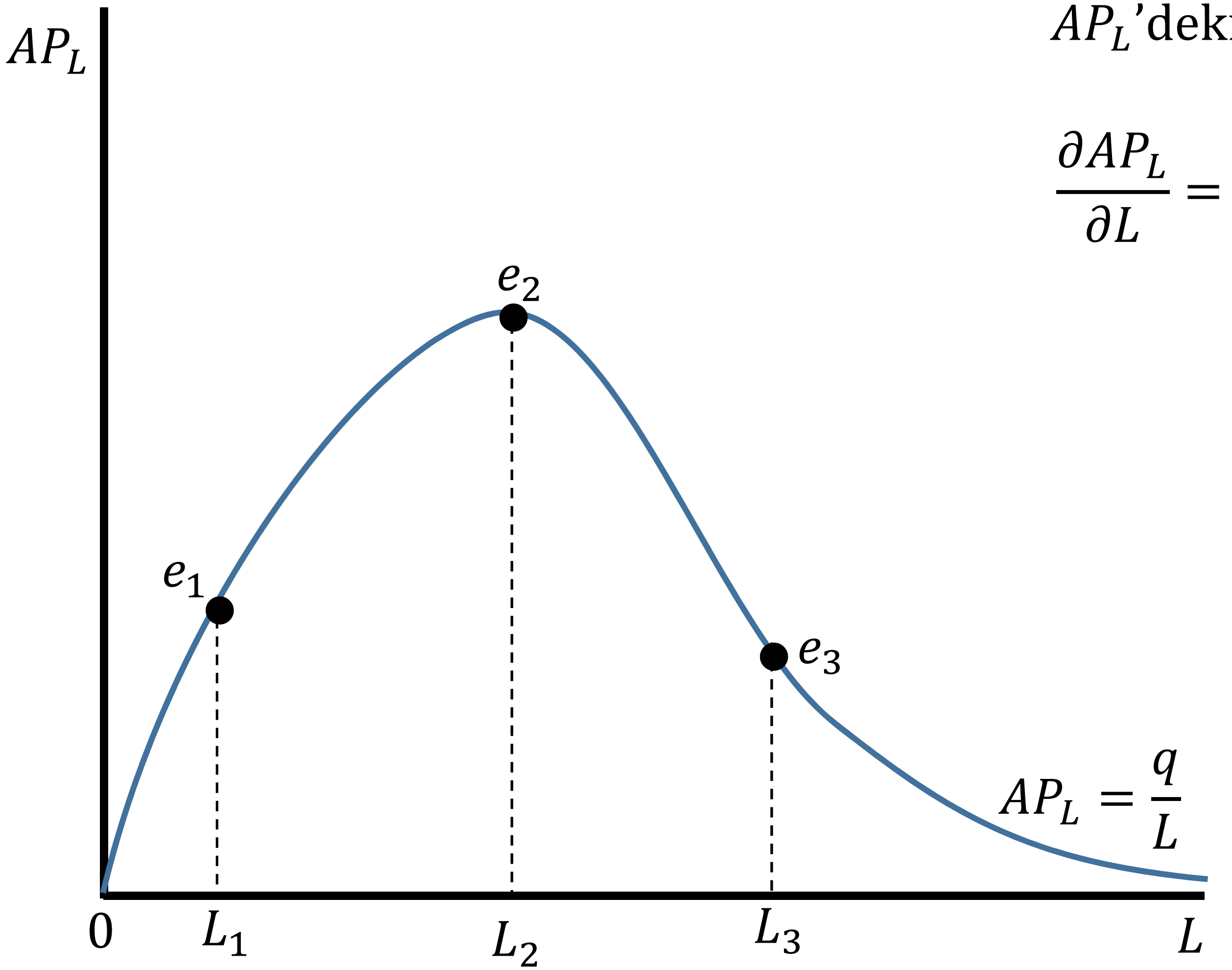
MP_L'deki değişim:

$$\frac{\partial MP_L}{\partial L} = \frac{\partial(\partial q/\partial L)}{\partial L} = \frac{\partial^2 q}{\partial L^2}$$

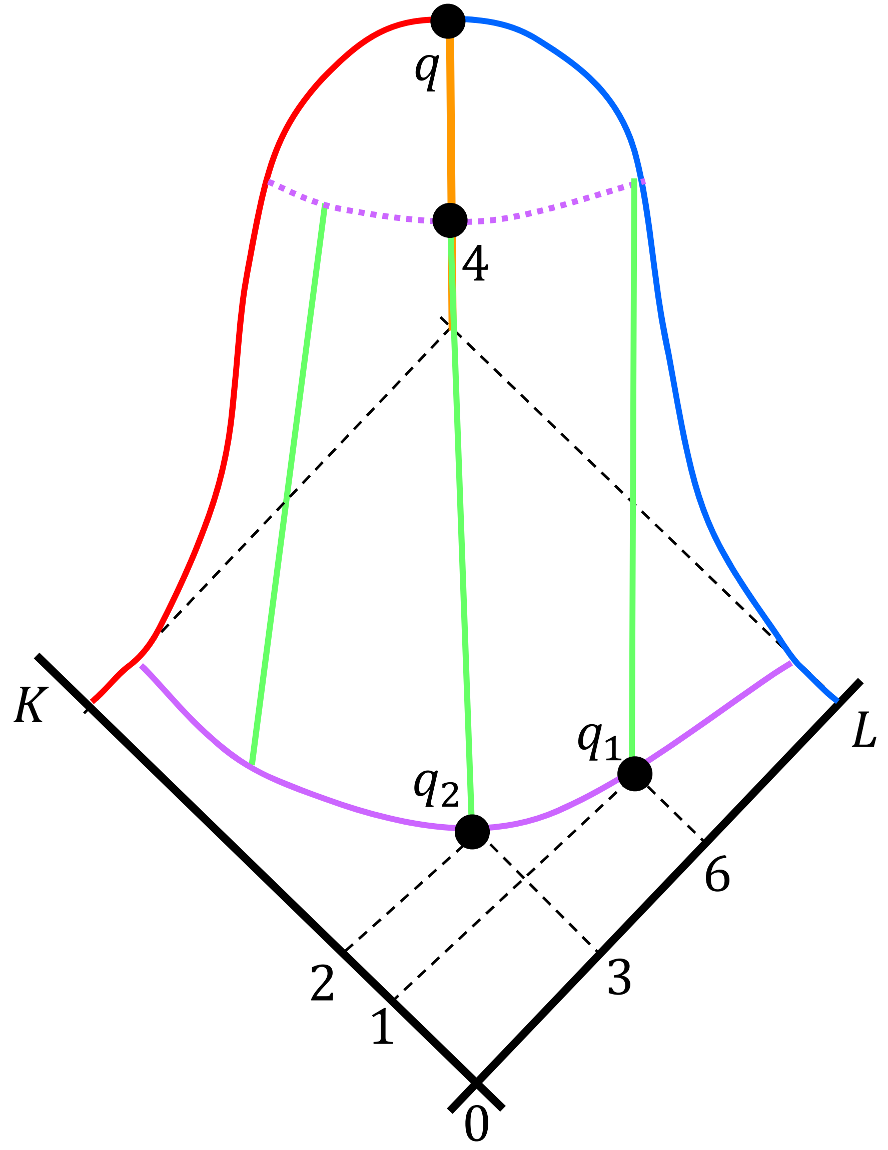
Şekil 79. Ortalama Verimlilik Eğrisi

AP_L'deki değişim:

$$\frac{\partial AP_L}{\partial L} = \frac{\partial (q/L)}{\partial L}$$

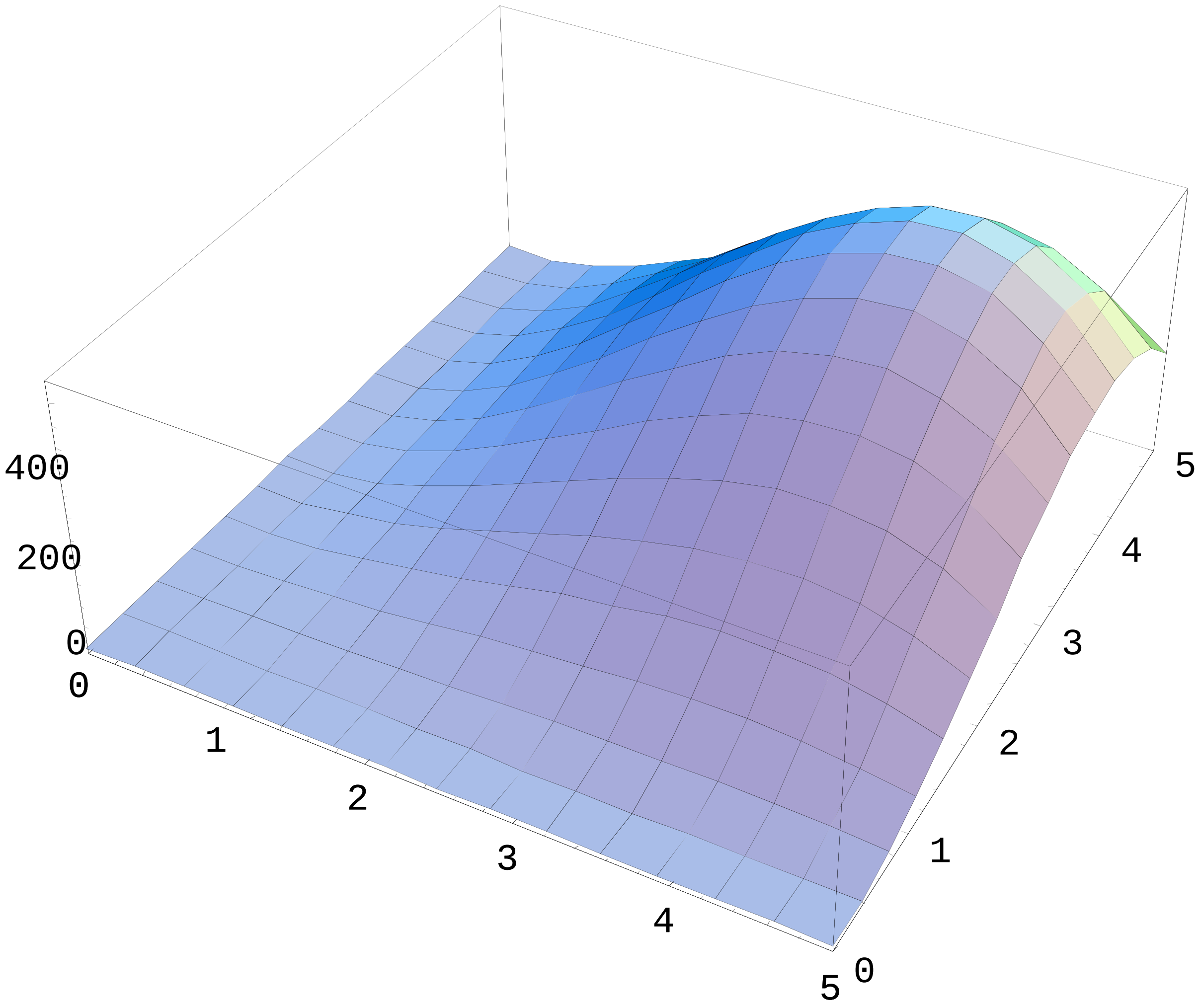


Şekil 80. Üretim Fonksiyonu ve Kayıtsızlık Eğrileri



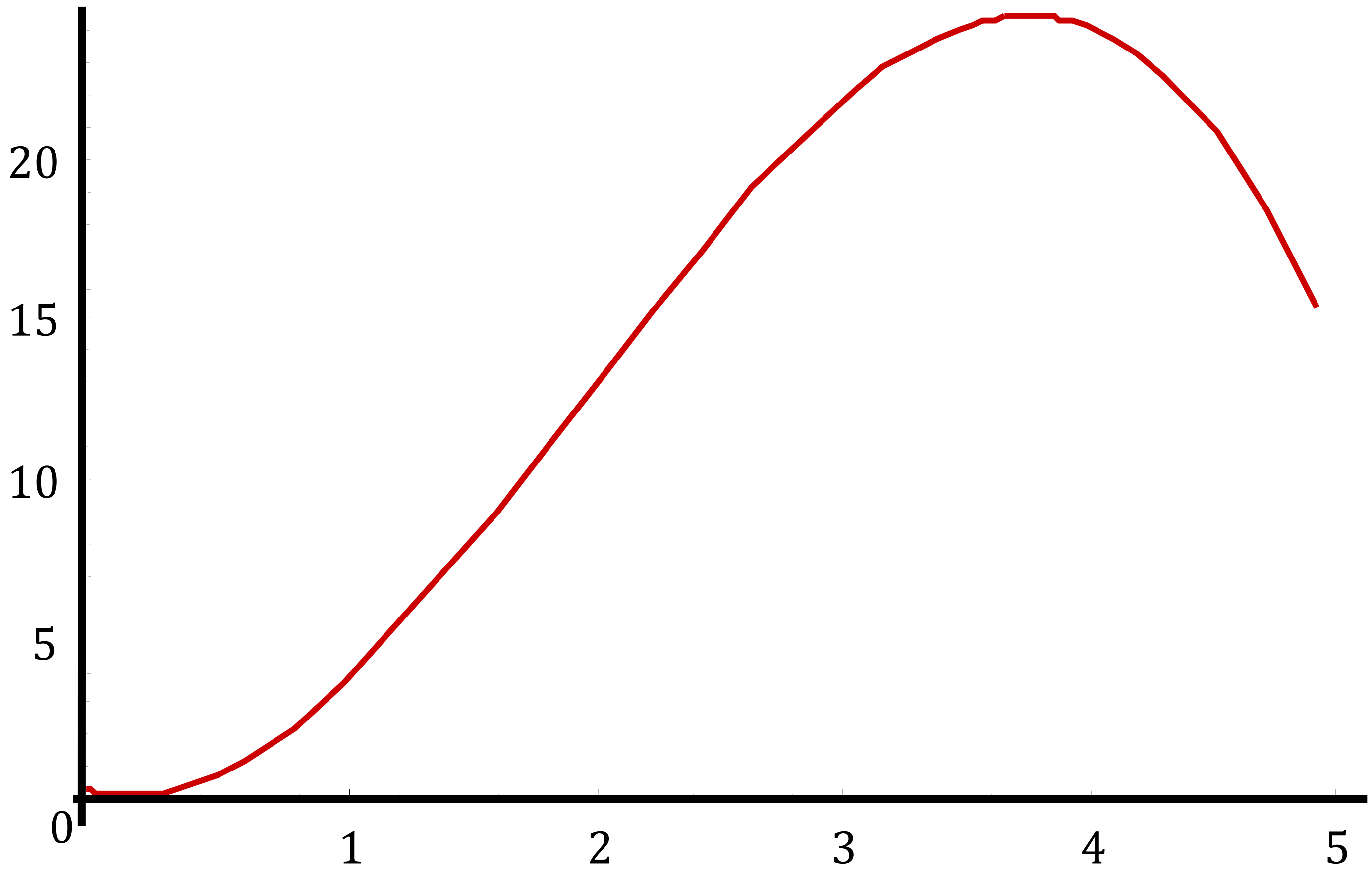
Şekil 81a. Üretim Fonksiyonu

$$q = q(K,L) = (-K^3 + 6K^2 - 2K)(-L^3 + 6L^2 - 2L)$$



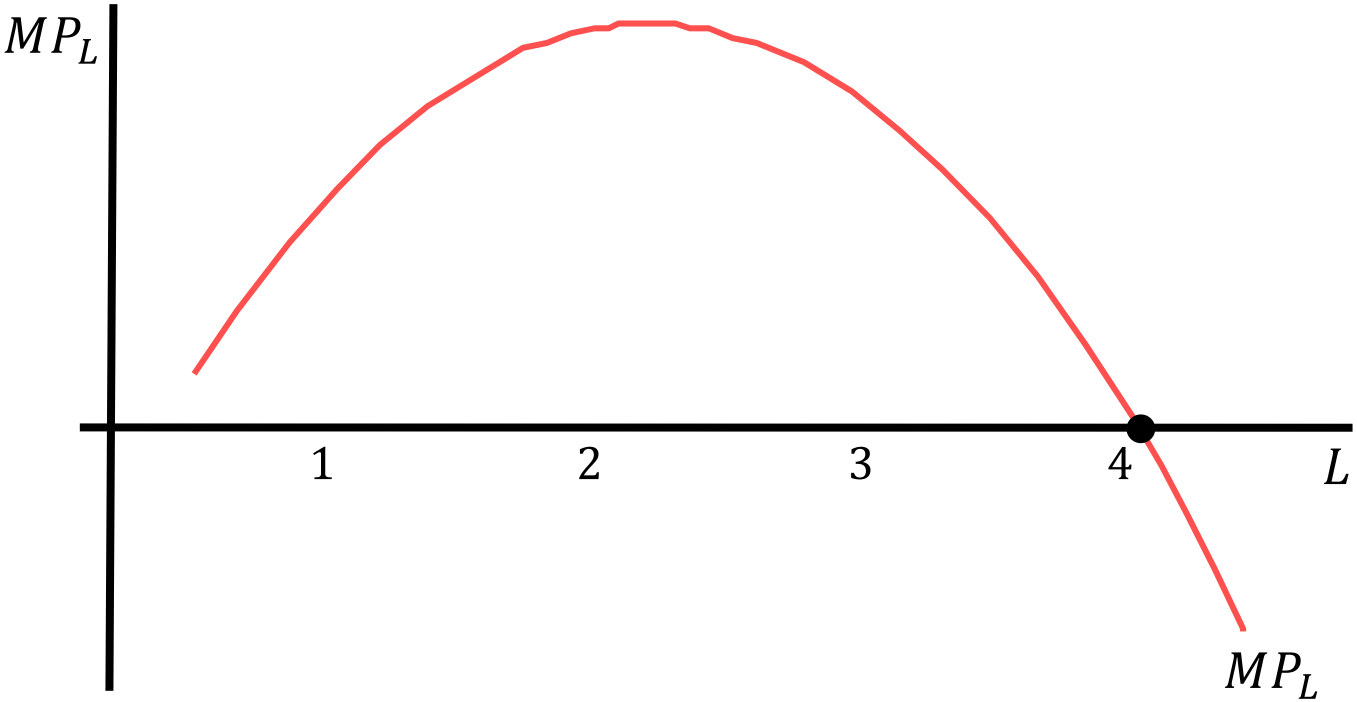
Şekil 81b. Üretim Fonksiyonu (Sermaye Sabit)

$$q = q(\overline{K}, L) = -L^3 + 6L^2 - 2L$$



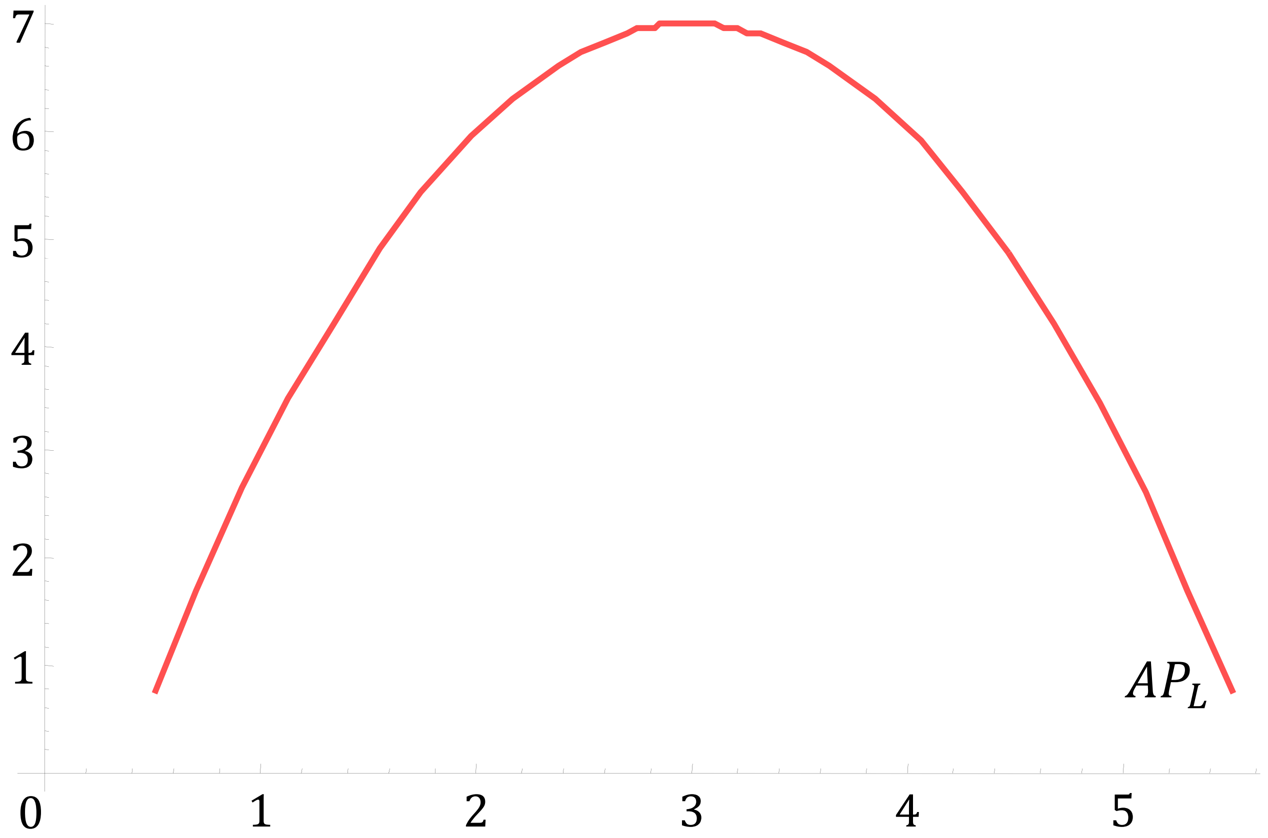
Şekil 81c. Marjinal Verimlilik Eğrisi

$$MP_L = MP_L(\overline{K}, L) = -3L^2 + 12L - 2$$



Şekil 81d. Ortalama Verimlilik Eğrisi

$$AP_L = AP_L(\bar{K}, L) = -L^2 + 6L - 2$$



Bir girişimci, çok sayıda farklı girdi bileşimi kullanarak, farklı üretim miktarları elde edebilir. Üretim fonksiyonu etkin girdi-çıktı bileşimlerini gösterse de, hangi bileşimin girişimcinin kârını maksimize edeceğini söylemez. Bunu görebilmek için, girişimcinin kullanabileceği teknolojileri incelemek gerekir.

Genel olarak teknolojiyi nitelendiren iki olgu vardır :

1. Kullanılan teknolojinin ölçeğe göre getirisi.

2. İkame esnekliği.

Ölçeğe göre getiri, girdilerin tümü aynı oranda artırıldığında, üretim miktarının ne oranda değiştiği konusunda bilgi verir. Örneğin sermaye ve işgücünü iki katına çıkarırsak, üretim miktarı iki kattan daha fazla mı, daha az mı, yoksa aynı ölçüde mi artar? Bu sorunun yanıtı, kullanılan teknolojinin ölçeğe göre getirisine bağlıdır.

Eğer girdileri iki kat artırdığımızda;

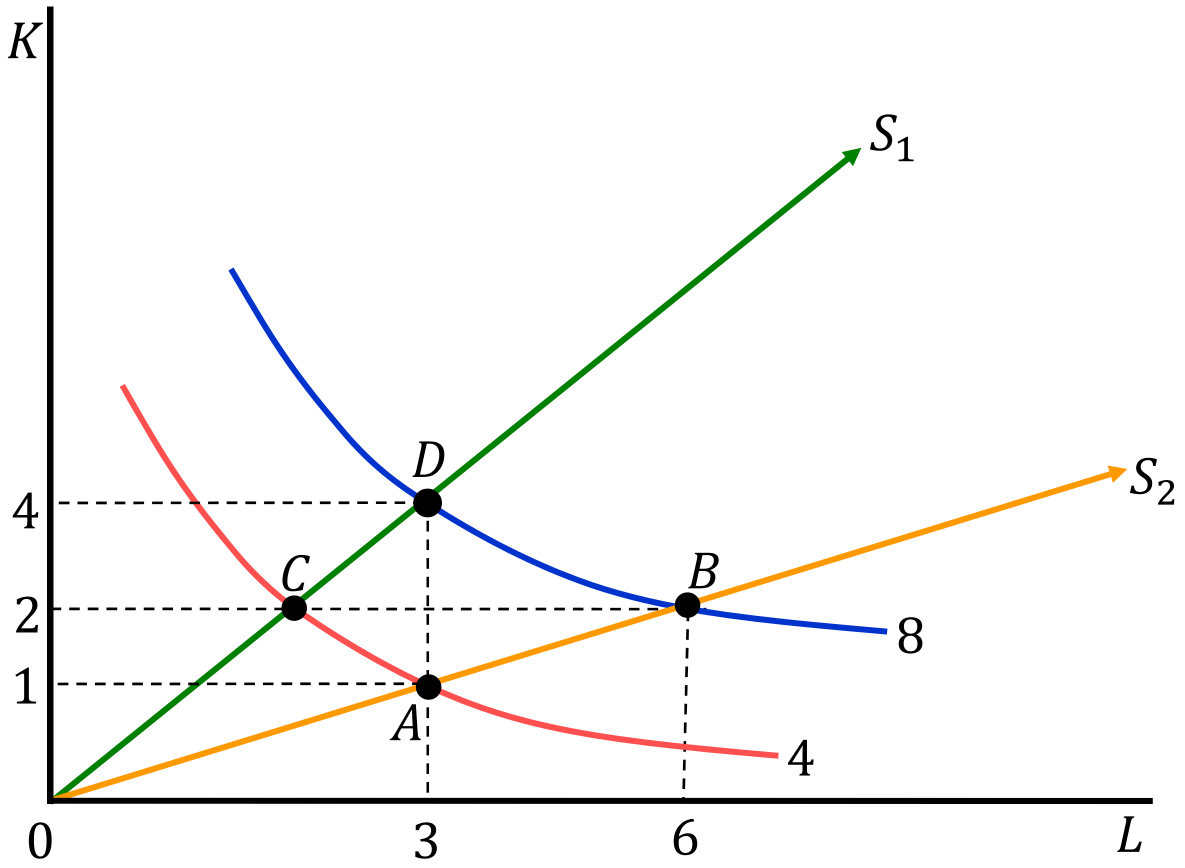
1. Üretim miktarı iki kattan fazla artıyorsa ölçeğe göre artan getiri
2. Üretim miktarı iki kattan az artıyorsa ölçeğe göre azalan getiri
3. Üretim miktarı iki kat artıyorsa ölçeğe göre sabit getiri

vardır.

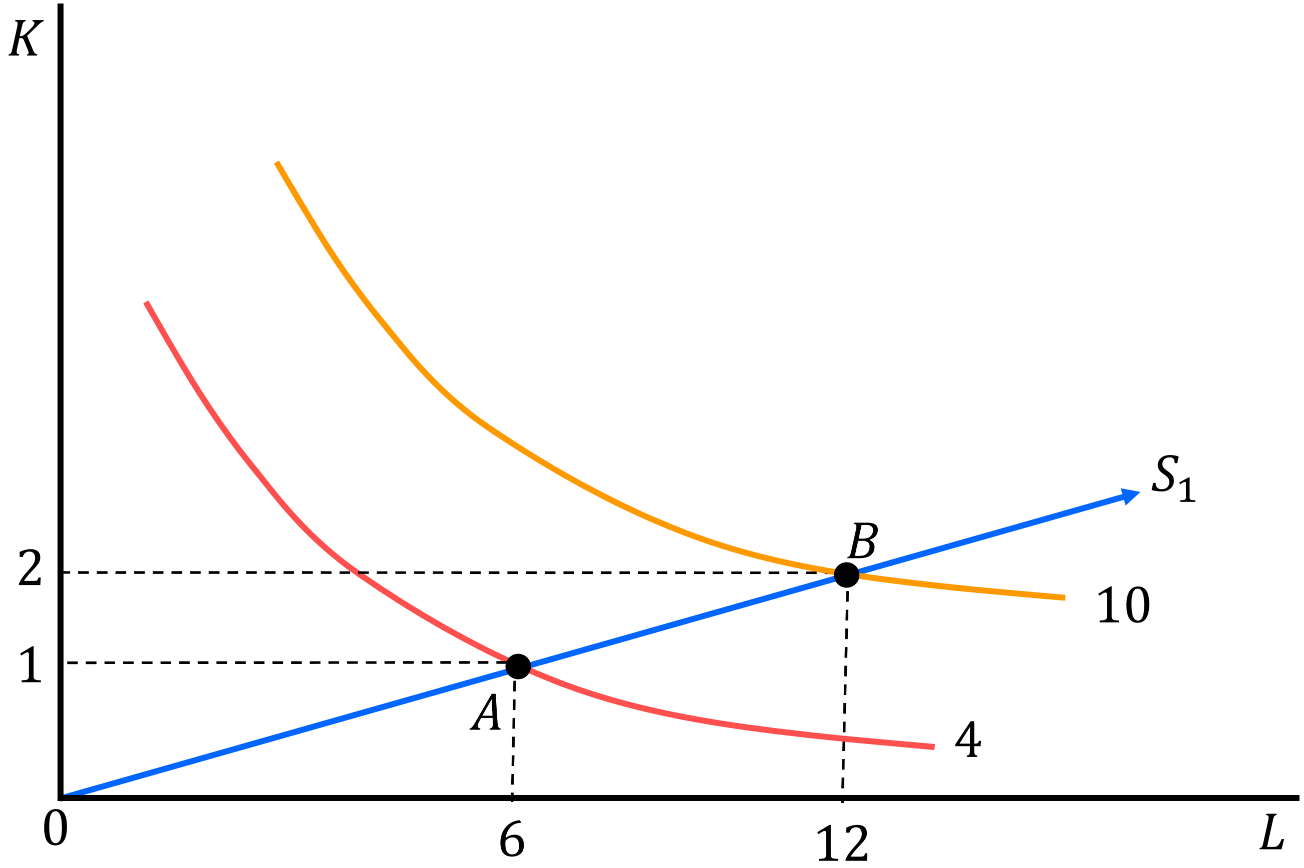
Aşağıda verilen ölçeğe göre getiri şekillerinin (Şekil 82a,b,c) her birinde sermaye (K) ve işgücünü (L) iki katına çıkarıyoruz.

Ölçeğe göre getirinin sabit olduğu şekilde üretim 4'den 8'e çıkmakta (yani iki kat artmakta); getirinin artan olduğu durumda 4'den 10'a çıkmakta (yani iki buçuk kat artmakta); azalan olduğu durumda da 4'den 6'ya çıkmaktadır (yani bir buçuk kat artmakta).

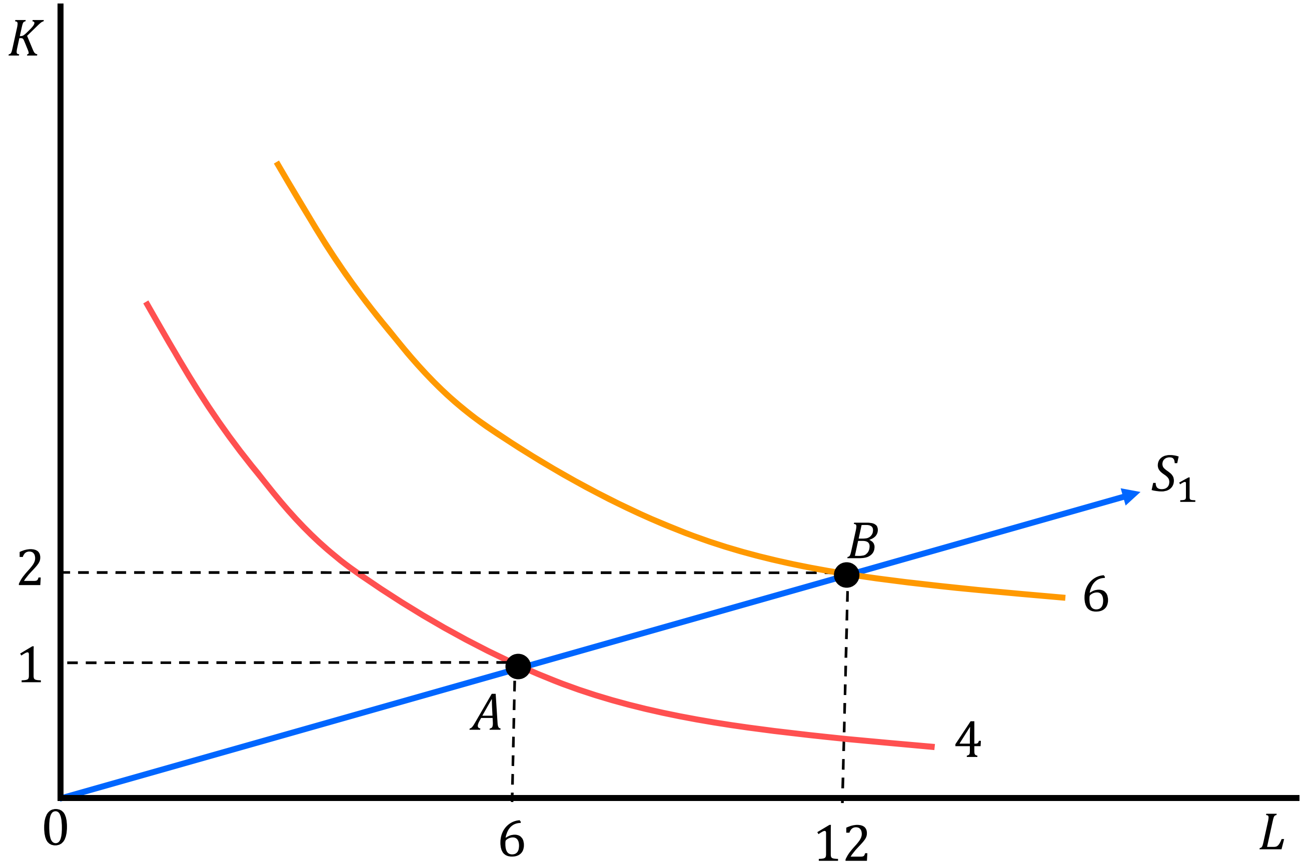
Şekil 82a. Ölçeğe Göre Sabit Getiri



Şekil 82b. Ölçeğe Göre Artan Getiri



Şekil 82c. Ölçeğe Göre Azalan Getiri



Ölçeğe göre artan getirinin çeşitli nedenleri vardır.

1. Firma büyüdükçe, işçilerin uzmanlaşması artar, dolayısıyla verimliliği yükselir.

2. Bazı sermaye malları büyük ölçekli firmalarda kullanıldığında önemli tasarruflar sağlayabilir. Örneğin modern bir biçer-döver aracının 100 dönümlük bir işletmede kullanılması ile, 100000 dönümlük işletmede kullanılması gibi.

3. Fiziksel koşullarda bazı değişikliklerin yapılması. Örneğin boru hattıyla petrol taşımacığı yapan bir firma, boru çapını iki katına çıkardığında, taşınan petrol miktarı iki katından fazla artar.

Teknolojiyi niteleyen diğer önemli konu ikame esnekliğidir. *İkame esnekliği*, veri bir üretim düzeyinde girdilerin birbirini ne kolaylıkta ikame ettiğini gösterir.

İkame esnekliği, göreli faktör fiyatlarındaki yüzde değişmenin, faktör yoğunluğunda yol açtığı yüzde değişme ile ölçülür.

$$\sigma = \frac{\overbrace{\dfrac{\Delta(K/L)}{(K/L)}}^{\text{Faktör yoğunluğundaki } (K/L) \text{ yüzde değişme}}}{\underbrace{\dfrac{\Delta(w/r)}{(w/r)}}_{\text{Göreli Faktör fiyatlarındaki } (w/r) \text{ yüzde değişme}}}$$

Üretim teorisi içinde şu ana kadar, girişimcinin optimal bir girdi bileşimini nasıl ayarlayabileceği ile ilgili konuları ele aldık. Ancak analizi zamandan soyutlayarak yaptık. Girişimcinin, üretmeyi planladığı çıktı miktarını en az harcamayla üretebilmesi için gereken optimal girdi karmasını ne kadar bir zamanda oluşturabileceğini de bilmesi gereklidir.

Örneğin reçel üreticisinin elinde 1 adet kavanoz olduğunu ve 6 meyve toplayıcısıyla da anlaşma yapmış olduğunu varsayalım. Eğer üretim zamanında reçel talebi düşecek olursa, girişimcinin girdi sözleşmelerini önceden yaparak bağlanmış olması nedeniyle, bu durum karşısında yapabileceği hiçbir şey yoktur. Bu zaman dilimine, *piyasa dönemi* ya da *çok kısa dönem* diyoruz.

Zaman boyutunu biraz daha artırdığımızda, girişimci sermaye girdisinde bir değişiklik yapamasa da, işgücü girdisini, sözleşmeleri iptal ederek azaltabilir, dolayısıyla üretimi kısabilir. Bu zaman dilimine kısa dönem diyoruz. Dikkat edilmesi gereken nokta, girdilerden biri sabitken, diğeri değişkendir.

Girişimcinin tüm girdileri değiştirebileceği zaman dilimi de *uzun dönem* olarak ifade edilmektedir. Böyle bir dönemdeki üretim fonksiyonunu da *uzun dönem üretim fonksiyonu* olarak adlandırıyoruz. Dolayısıyla kısa dönem üretim fonksiyonunda girişimci yalnızca işgücü kullanımını değiştirebiliyor. Sermaye sabit girdidir.

Şekil 83'deki üretim eğrisi üzerindeki işgücü marjinal verimliliklerini ve değişimlerini kısa dönem için şöyle yazabiliriz:

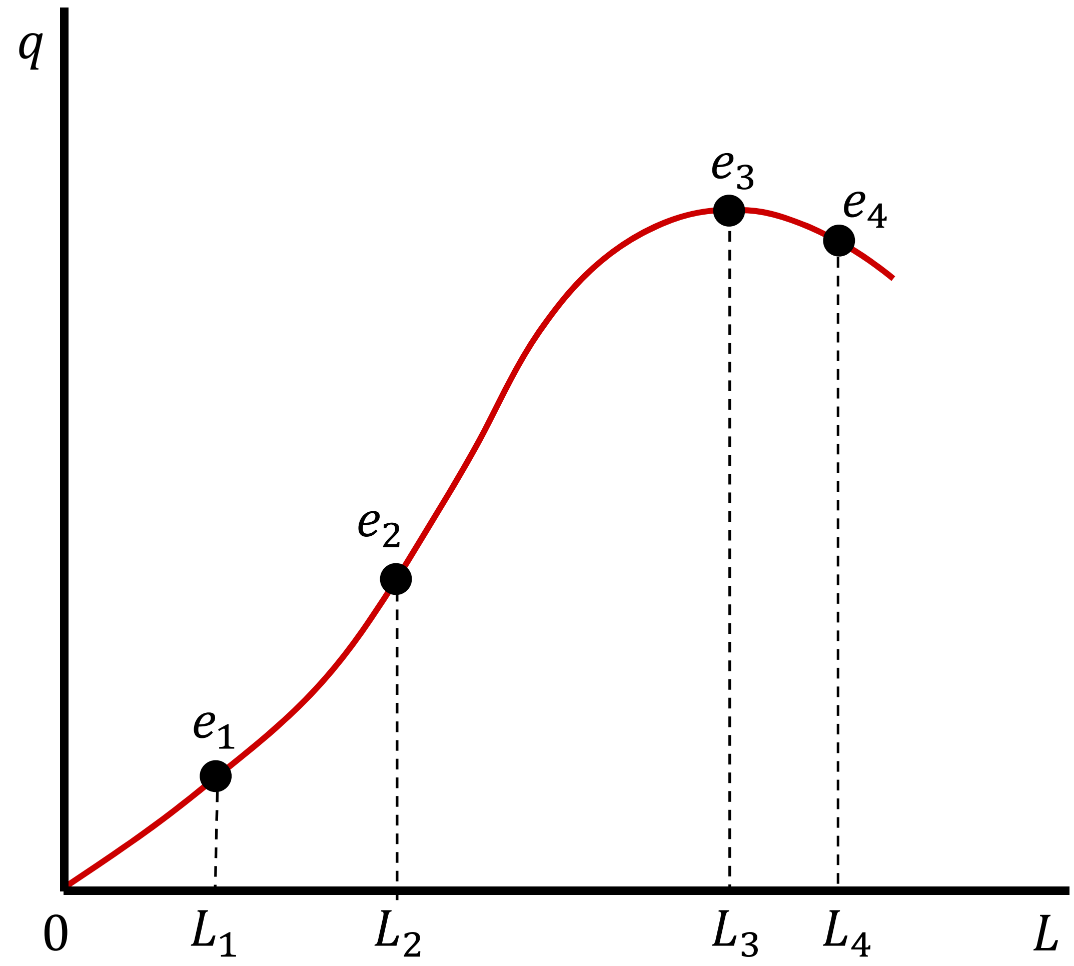
L_1'de: $\dfrac{\partial q}{\partial L} > 0 \quad , \quad \dfrac{\partial^2 q}{\partial L^2} > 0$

L_2'de: $\dfrac{\partial q}{\partial L} > 0 \quad , \quad \dfrac{\partial^2 q}{\partial L^2} = 0$

L_3'te: $\dfrac{\partial q}{\partial L} = 0 \quad , \quad \dfrac{\partial^2 q}{\partial L^2} < 0$

L_4'te: $\dfrac{\partial q}{\partial L} < 0 \quad , \quad \dfrac{\partial^2 q}{\partial L^2} < 0$

Şekil 83. Kısa Dönemde İşgücünün Marjinal Verimliliği



Cobb-Douglas Üretim Fonksiyonu

İktisat biliminde hem teorik hem de uygulamalı çalışmalarda çok sık kullanılan bir fonksiyondur. Bu fonksiyonun genel biçimi şöyledir :

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta}, \quad A > 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0$$

Cobb-Douglas üretim fonksiyonunu kullanarak, üretime ilişkin olguları inceleyelim. Aşağıda sırasıyla ölçeğe göre getiri, marjinal teknik ikame oranı, ikame esnekliği, sermayenin ve işgücünün marjinal ve ortalama verimlilikleri konuları ele alınmıştır.

1. Ölçeğe Göre Getiri

Bir üretim fonksiyonunun ölçeğe göre getirisi, fonksiyondaki tüm girdiler aynı oranda artırıldığında, üretime ne olacağını gösterir. Cobb-Douglas üretim fonksiyonunda ölçeğe göre getiri derecesi, $\alpha + \beta$'ya eşittir. Bunu görebilmek için şu işlemleri yapalım :

$$Q^* = A(\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{\beta}$$

$$Q^* = \lambda^{\alpha+\beta} A K^{\alpha} L^{\beta} \quad \rightarrow \quad Q^* = \lambda^{\alpha+\beta} Q$$

$\alpha + \beta = 1 \longrightarrow Q^* = Q \longrightarrow$ Ölçeğe göre sabit getiri

$\alpha + \beta > 1 \longrightarrow Q^* > Q \longrightarrow$ Ölçeğe göre artan getiri

$\alpha + \beta < 1 \longrightarrow Q^* < Q \longrightarrow$ Ölçeğe göre azalan getiri

2. Marjinal Teknik İkame Oranı

Marjinal teknik ikame oranı $(MRTS_{KL})$, aynı üretim düzeyini sürdürebilecek şekilde, girdilerden birinden vazgeçilen miktarın, diğer girdideki artışa oranıdır. Aynı zamanda eş-ürün eğrisinin eğimiyle belirlenir. $MRTS_{KL}$'ye ulaşabilmek için, üretim fonksiyonunun toplam diferansiyelini bulur, sıfıra eşitleriz.

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial K} dK + \frac{\partial Q}{\partial L} dL = 0 \quad \rightarrow \quad MRTS_{KL} = -\frac{dK}{dL} = \frac{\partial Q / \partial L}{\partial Q / \partial K}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \alpha A K^{\alpha - 1} L^{\beta} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial L} = \beta A K^{\alpha} L^{\beta - 1}$$

$$MRTS_{KL} = -\frac{dK}{dL} = \frac{\beta A K^{\alpha} L^{\beta - 1}}{\alpha A K^{\alpha - 1} L^{\beta}} = \frac{\beta L^{-1} A K^{\alpha} L^{\beta}}{\alpha K^{-1} A K^{\alpha} L^{\beta}} = \frac{\beta L^{-1} Q}{\alpha K^{-1} Q}$$

$$MRTS_{KL} = \frac{\beta K}{\alpha L}$$

3. İkame Esnekliği

İkame esnekliği, aynı zamanda bir eş-ürün eğrisinin eğrilik derecesi konusunda da bilgi verir. Dolayısıyla, $MRTS_{KL}$'de meydana gelen yüzde değişmenin, faktör yoğunluğunda yol açtığı yüzde değişme olarak da tanımlanabilir.

$$\sigma = \frac{d\ln(K/L)}{d\ln(MRTS_{KL})} = \frac{d(K/L)/(K/L)}{d(MRTS_{KL})/(MRTS_{KL})}$$

$$\sigma = \frac{d(K/L)/(K/L)}{d(d\,K/d\,L)/(d\,K/d\,L)}$$

$$MRTS_{KL} = \frac{\beta K}{\alpha L} \quad \rightarrow \quad \ln(MRTS_{KL}) = \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + \ln\left(\frac{K}{L}\right)$$

$$\frac{d\ln(MRTS_{KL})}{d\ln(K/L)} = 1 = \frac{1}{\sigma} \quad \rightarrow \quad \sigma = \frac{d\ln(K/L)}{d\ln(MRTS_{KL})} = 1$$

4. Üretim Fonksiyonu Ölçeğe Göre Sabit Getiriliyse

$$Q = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

Ayrıca şu tanımlamaları da yapalım :

$$q = \frac{Q}{L} \quad , \quad k = \frac{K}{L}$$

Bu yeni tanımlara göre q , kişi başına çıktı; k, kişi başına sermayedir. Üretim fonksiyonunu yeniden yazalım.

$$Q = AK^{\alpha}L^{1}L^{-\alpha} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}L \quad \rightarrow \quad \frac{Q}{L} = q = Ak^{\alpha}$$

Şimdi de sırasıyla sermayenin ve işgücünün marjinal ve ortalama verimliliklerine bakalım.

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = A\alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha} = \alpha A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1} = \alpha A k^{\alpha-1}$$

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = AK^{\alpha}(1-\alpha)L^{1-\alpha-1} = (1-\alpha)A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = (1-\alpha)Ak^{\alpha}$$

$$AP_K = \frac{Q}{K} = \frac{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{K} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1} = Ak^{\alpha-1}$$

$$AP_L = \frac{Q}{L} = \frac{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{L} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = Ak^{\alpha}$$

Sermaye ve işgücüne, marjinal verimlilikleri ölçüsünde ödeme yapıldığını varsayalım. Bu durumda sermaye ve işgücünün toplam üründen aldıkları payları sırasıyla yazalım.

$$\frac{K.MP_K}{Q} = \frac{K\alpha Ak^{\alpha-1}}{LAk^{\alpha}} = \alpha \quad , \qquad \frac{L.MP_L}{Q} = \frac{L(1-\alpha)Ak^{\alpha}}{LAk^{\alpha}} = 1-\alpha$$

Görüldüğü gibi, sermaye ve işgücünün üstel katsayıları, girdilerin çıktıdan aldıkları göreli payları göstermektedir. Ölçeğe göre sabit getirili üretim fonksiyonunda, toplam ürün sermaye ve işgücünün marjinal verimliliği ölçüsünde dağıtıldığında, geride dağıtılmamış ürün kalmamaktadır. Bu şekildeki çıktı dağılımına Euler Teoremi adını veriyoruz. Bunu görelim.

$$Q = K\frac{\partial Q}{\partial K} + L\frac{\partial Q}{\partial L}$$

$$Q = K\alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha} + L(1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha}$$

$$Q = \alpha Q + (1-\alpha)Q$$

$$Q = Q$$

$$\begin{matrix}\text{Toplam} \\ \text{Ürün}\end{matrix} = \begin{matrix}\text{Dağıtılan} \\ \text{Ürün}\end{matrix}$$

Yukarıda α ve β terimlerinin, sırasıyla sermaye ve işgücünün çıktıdaki göreli payı olduğunu gördük. Bu terimler aynı zamanda çıktı-sermaye ve çıktı-işgücü esnekliklerini de göstermektedir.

$$\varepsilon_{QK} = \frac{\partial Q/Q}{\partial K/K} = \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q} = \frac{\partial Q/\partial K}{Q/K}$$

$$\varepsilon_{QL} = \frac{\partial Q/Q}{\partial L/L} = \frac{\partial Q}{\partial L}\frac{L}{Q} = \frac{\partial Q/\partial L}{Q/L}$$

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta} \quad \rightarrow \quad \ln Q = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L$$

$$\frac{\partial \ln Q}{\partial \ln K} = \frac{\partial Q/Q}{\partial K/K} = \alpha = \varepsilon_{QK}\,, \frac{\partial \ln Q}{\partial \ln L} = \frac{\partial Q/Q}{\partial L/L} = \beta = \varepsilon_{QL}$$

CES Üretim Fonksiyonu

CES (Constant Elasticity of Substitution, Sabit İkame Esnekliği) üretim fonksiyonu şöyledir:

$$Q = A[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}} \ , \ \ A > 0 \ , \ \ 0 < \delta < 1 \ , \ \ -1 < \rho \neq 0$$

Cobb-Douglas üretim fonksiyonu, CES üretim fonksiyonunun ($\rho \to \infty$ iken) özel bir biçimidir. Bunu daha sonra göreceğiz. CES'deki bir çok parametre ve değişken, Cobb-Douglas'daki gibidir. A, etkenlik parametresidir (teknoloji endeksi); δ, üretimin girdiler arasındaki dağılımını; ρ parametresi, ikame esnekliğinin derecesini belirler.

İlk olarak CES'in türdeşliğini inceleyelim:

$$= A[\delta(jK)^{-\rho} + (1-\delta)(jL)^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}$$

$$= jA[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}} = jQ$$

Bu sonuca göre CES, birinci dereceden (doğrusal) türdeştir. Yani ölçeğe göre sabit getiriye sahiptir. Ortalama ve marjinal fizik ürünler sıfırıncı dereceden türdeştir, Euler teoremini sağlar ve kesin içbükeyimsidir (kayıtsızlık eğrileri kesin dışbükeydir). Bu son özelliği görelim. Bunun için aşağıda sırasıyla işgücü ve sermaye için marjinal fizik ürünleri belirleyelim.

$$Q_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = A\left(-\frac{1}{\rho}\right)[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}-1}(1-\delta)(-\rho)L^{-\rho-1}$$

$$= (1-\delta)A[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]^{-\frac{1+\rho}{\rho}}L^{-(1+\rho)}$$

$$= (1-\delta)\frac{A^{1+\rho}}{A^{\rho}}([\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]^{1+\rho})^{-\frac{1}{\rho}}L^{-(1+\rho)}$$

$$= \frac{(1-\delta)}{A^{\rho}}\left(\frac{Q}{L}\right)^{1+\rho} \quad > 0$$

$$Q_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{\delta}{A^{\rho}}\left(\frac{Q}{K}\right)^{1+\rho} \quad > 0$$

eş-ürün eğrisinin eğimi:

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{Q_L}{Q_K} = \frac{\frac{(1-\delta)}{A^\rho}\left(\frac{Q}{L}\right)^{1+\rho}}{\frac{\delta}{A^\rho}\left(\frac{Q}{K}\right)^{1+\rho}} = -\frac{(1-\delta)}{\delta}\left(\frac{K}{L}\right)^{1+\rho} < 0$$

Şimdi de dK^2/d^2L'ye bakalım:

$$\frac{d^2K}{dL^2} = \frac{d(d\,K/d\,L)}{dL} = \frac{(1-\delta)(1+\rho)}{\delta}\frac{K^{1+\rho}L^\rho}{(L^{(1+\rho)})^2} > 0$$

İkame esnekliği, göreli faktör fiyatlarındaki yüzde değişimin, sermaye ve işgücü ikamesinde yüzde olarak nasıl bir değişme olabileceğini, bir başka ifadeyle veri faktör fiyatlarında K ve L 'nin birbirini ne ölçüde ikame ettiklerini gösterir. Bunu CES için görelim:

$$\left.\sigma = \frac{\dfrac{d(K/L)}{(K/L)}}{\dfrac{d(w/r)}{(w/r)}} = \frac{\dfrac{d(K/L)}{d(w/r)}}{\dfrac{(K/L)}{(w/r)}} \right\} \text{Genel olarak ikame esnekliği}$$

Optimal girdi bileşimi sağlandığında, şu denge koşulunun geçerli olacağından hareket edelim:

$$\frac{Q_L}{Q_K} = \frac{w}{r} = \frac{(1-\delta)}{\delta}\left(\frac{K}{L}\right)^{1+\rho}$$

Buradan optimal girdi oranını yazabiliriz:

$$\frac{K^*}{L^*} = \left(\frac{(1-\delta)}{\delta}\right)^{\frac{1}{1+\rho}}\left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{1+\rho}}$$

Her iki yanın önce logaritmasını, sonra da (w/r)'ye göre türevini alırsak, ikame esnekliğini elde ederiz.

$$\sigma = \frac{d\ln(K^*/L^*)}{d\ln(w/r)} = \frac{d(K^*/L^*)/\left(K^*/L^*\right)}{d(w/r)/\left(w/r\right)} = \frac{1}{1+\rho}$$

Cobb-Douglas üretim fonksiyonu, CES üretim fonksiyonunun (ρ→0 iken) özel bir biçimidir. Aşağıdaki işlemleri yaparak, bunu görelim:

$$Q = A[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}$$

$$\lim_{\rho \to 0}(Q) = \lim_{\rho \to 0}\left(A[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}\right) = \frac{0}{0}$$

Belirsizliğini ortadan kaldırmak için, her iki yanın doğal logaritmasını alıp, L'Hopital kuralını kullanalım.

$$\ln\frac{Q}{A} = -\frac{\ln[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]}{\rho}$$

$$\lim_{\rho\to 0}\left(\ln\frac{Q}{A}\right)=\lim_{\rho\to 0}\left(\frac{\frac{d(-\ln[\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho}])}{d\rho}}{\frac{d\rho}{d\rho}}\right)$$

L'Hopital kuralı uygulandı.

$$\lim_{\rho\to 0}\left(\ln\frac{Q}{A}\right)=\lim_{\rho\to 0}\left(\frac{\delta\ln K+(1-\delta)\ln L}{1}\right)=\ln\left(K^{\delta}L^{1-\delta}\right)$$

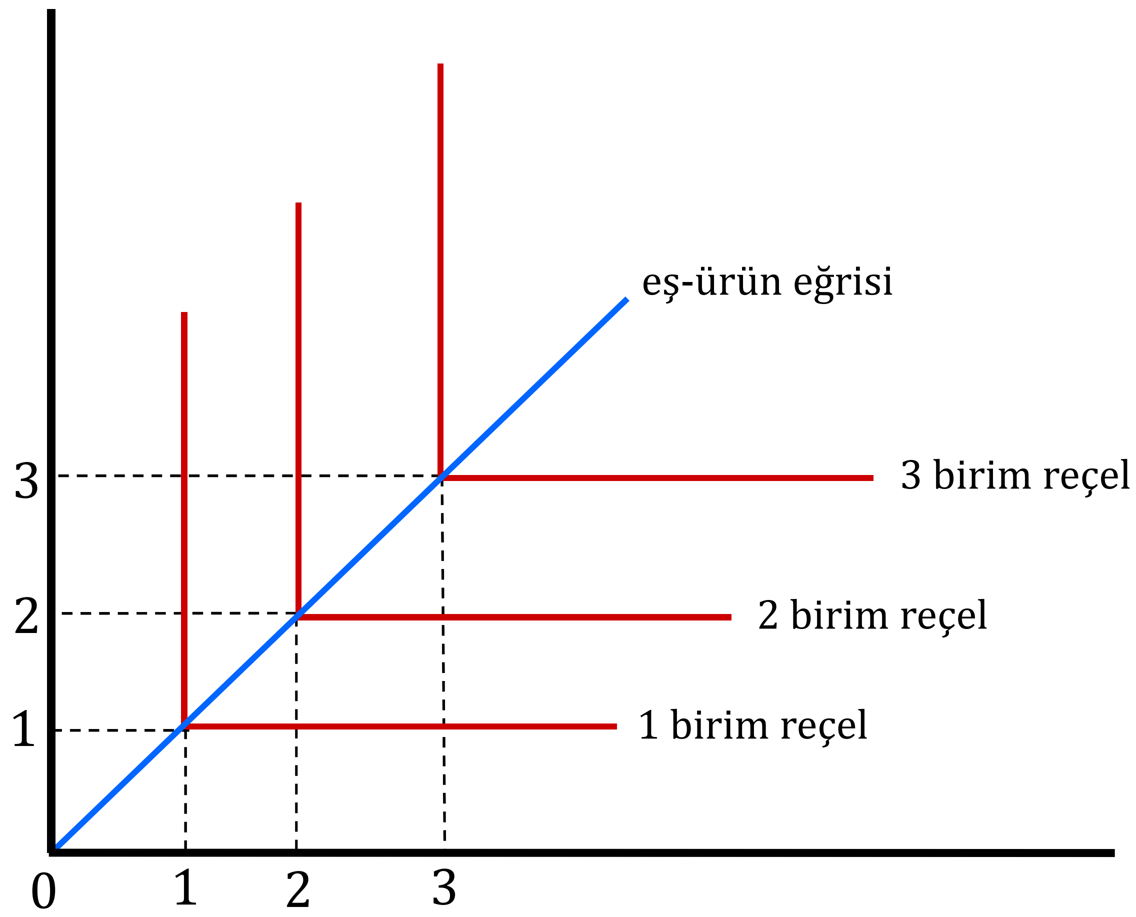
$$\lim_{\rho\to 0}Q=\lim_{\rho\to 0}\left(A[\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}\right)=AK^{\delta}L^{1-\delta}$$

MALİYET TEORİSİ

Maliyet fonksiyonunun biçimi, üretim fonksiyonunun biçimine bağlıdır. Bir an için reçel üreticisinin, bir birim kavanoz ve bir birim meyve toplayıcısı ile bir birim çıktı elde ettiği sabit katsayılı bir üretim tekniğine sahip olduğunu varsayalım. Yani K ve L arasında ikame yoktur. Bu üretim fonksiyonu Şekil 84'te gösterilmiştir.

Girişimci bir birimlik ürün (reçel) elde edebilmek için, hem kavanoz üretimi (sermaye malı) hem de meyve toplanmasına (işgücü) ödeme yapmak zorundadır. Bir birimlik reçel elde etmek için girdilere yapacağı ödemeleri nasıl minimize edebilir?

Şekil 84. Sabit Katsayılı Üretim Fonksiyonu ve Kayıtsızlık Eğrileri

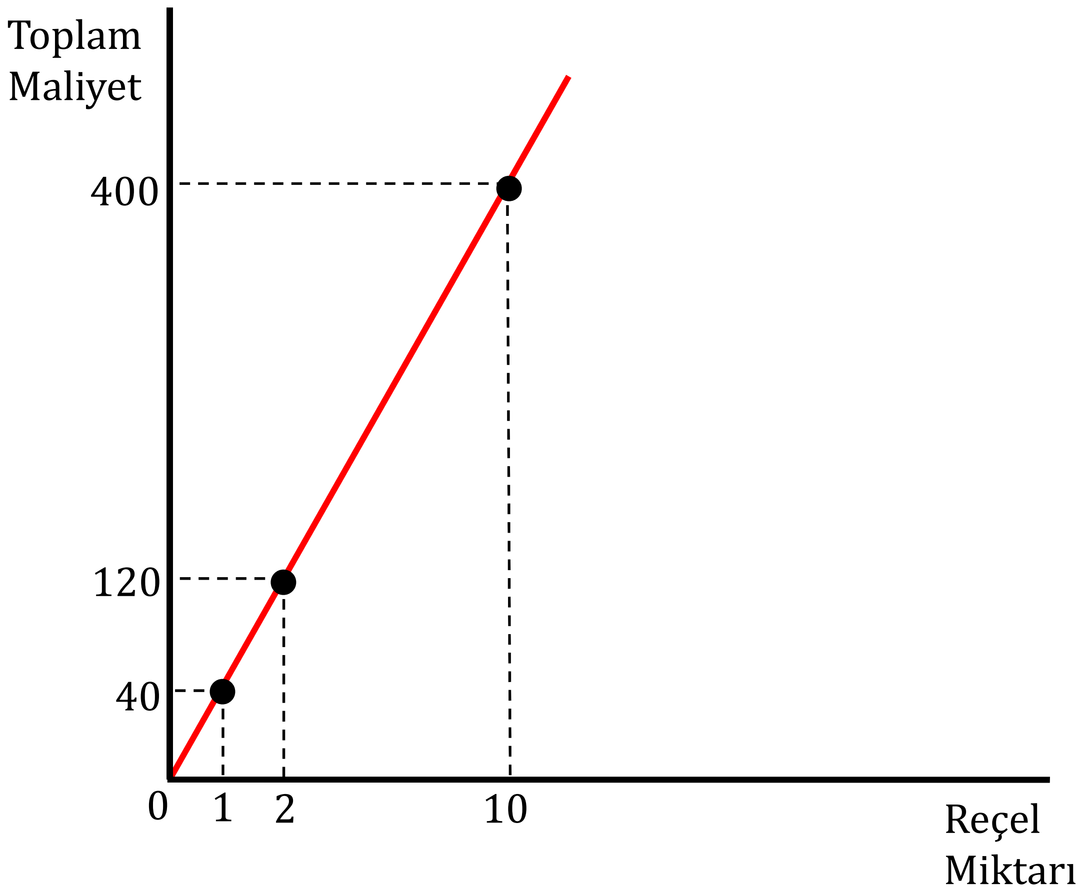


Bir birim kavanoz yapımının fırsat maliyetinin 38 TL ve 5 saatlik bir çalışma karşılığı olarak da meyve toplayıcısına 20 TL ödeme yaptığını varsayalım. Girişimcinin reçeli en düşük maliyetle üretmesinin yolu, birini kavanoz yapımında, diğerini de meyve toplayıcılığında istihdam etmek ve 20 TL'den toplam 40 TL ödeme yapmasıdır. Şekil 85 bu durumu göstermektedir. Üretim fonksiyonu sabit katsayılı olduğunu dikkate alırsak, 1 birim reçel üretmenin maliyeti 40 TL ise, 2 birim üretmenin 2x40=80 TL, X birim üretmenin de X.40 TL olduğunu söyleyebiliriz.

Maliyet fonksiyonu, belirli bir üretim düzeyini gerçekleştirmenin en ucuz ya da en etkin yolunu tanımlayan maliyet-çıktı ilişkisidir. Dolayısıyla girişimcinin kârını maksimize etmeye ve belirli bir üretim düzeyini en az maliyetle elde etmeye çalıştığını varsayıyoruz.

En düşük maliyet seçeneği, *etkinlik* olarak tanımlanmaktadır. Bu anlamda maliyet eğrisi, her bir üretim düzeyine karşılık gelen etkin noktaların geometrik yeridir. Girişimci, veri bir üretim düzeyi için en düşük maliyeti gerçekleştireceği girdi bileşiminin arayışı içinde olacaktır.

Şekil 85. Sabit Katsayılı Üretim Fonksiyonu ve Toplam Maliyet Eğrisi



Sabit katsayılı üretim fonksiyonu örneğinde reçel yapımcısı girişimci için böyle bir arayış, tek üretim olanağı nedeniyle söz konusu değildir. Girdiler arasında ikame yoktur, yani ikame esnekliği sıfırdır. Girişimci girdiler arasında ikamenin olabildiği bir üretim fonksiyonuyla çalışırsa, en düşük maliyetli girdi bileşimini belirlemeye çalışacaktır.

Veri bir çıktı düzeyini en düşük maliyetle üretebilmeye olanak sağlayan girdi karmasına, *optimal girdi bileşimi* diyoruz. Optimal girdi bileşimin belirlenmesi, girişimcinin ne kadar bir girdi karması ayarlama zamanına sahip olduğuna bağlıdır.

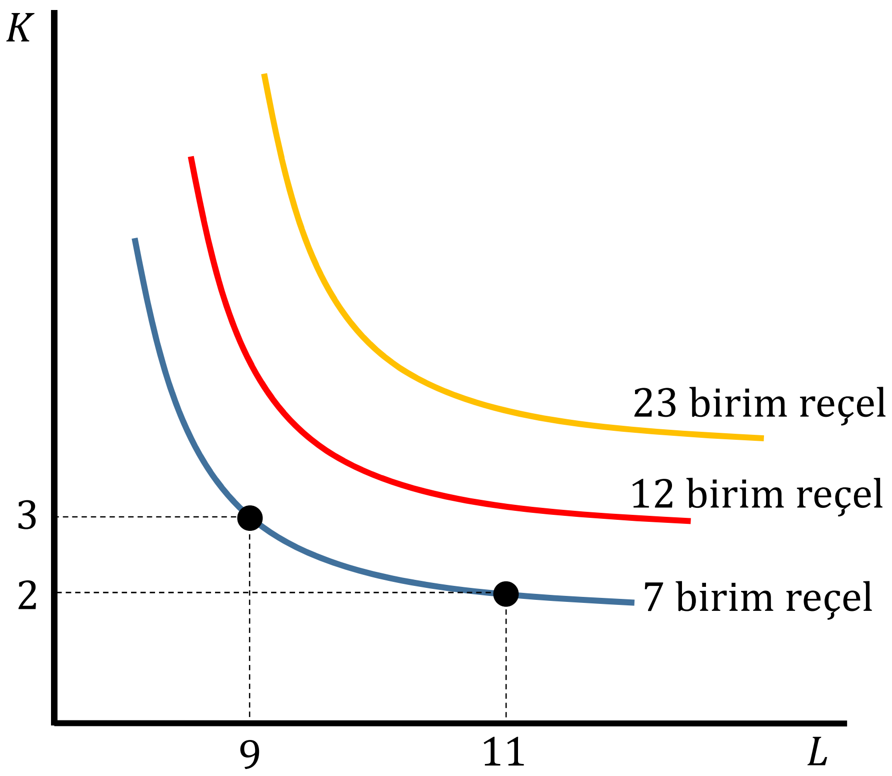
Optimal girdi bileşimini belirlemede girişimcinin sahip olduğu zamanın uzunluğu önemli olduğundan, maliyet fonksiyonlarını kısa ve uzun dönem ayrımı çerçevesinde inceleyeceğiz.

Uzun dönemde tüm girdiler değiştirilebildiğinden, uzun dönem maliyet fonksiyonuna bu açıda bakacağız. Kısa dönemde ise girdilerden biri (işgücü) değişkendir.

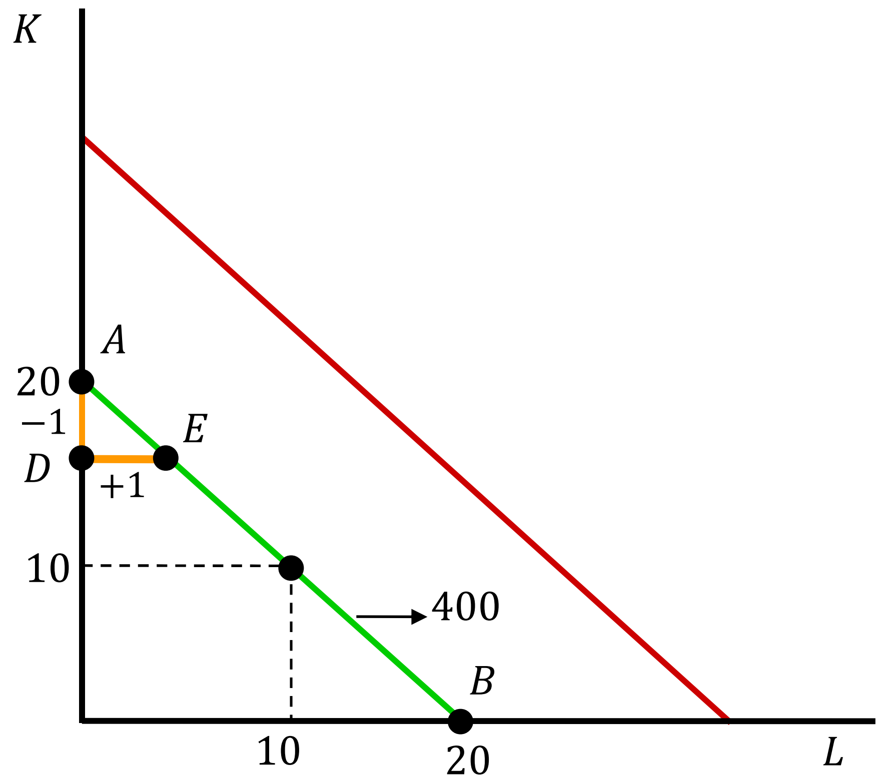
Reçel üreticisi girişimcinin karşısında belirli bir üretim düzeyini gerçekleştirebilmek için sonsuz sayıda üretim tekniği kullanabileceği bir teknoloji olanakları eğrisi olduğunu varsayalım. Bu durum Şekil 86'da gösterilmiştir. Örneğin 3 birim sermaye, 9 birim işgücü kullanarak 7 birim çıktı elde edebileceği gibi, aynı çıktıyı 2 birim sermaye, 11 birim işgücü kullanarak da üretebilir. Girişimciyi asıl ilgilendiren konu, hangi üretim tekniğini kullanırsa, 7 birim ürünü en düşük maliyetle elde edebileceğidir. Bu arayışın yanıtı, girdilerin göreli fiyatlarıdır.

Şekil 86b'yi dikkate alalım. 400 ile gösterilen AB doğrusunun üzerindeki tüm noktalarda girişimci hangi üretim tekniğini seçerse seçsin, 400 birimlik bir harcama yapacaktır (maliyet üstlenecektir). Dolayısıyla bu doğruyu, $rK + wL = 400$ denklemiyle gösterebiliriz. Burada r, sermayenin birim fiyatı yani faiz oranı; w, işgücünün birim fiyatı yani ücret oranıdır. AB doğrusuna *eş-maliyet doğrusu* adını veriyoruz. Eş-maliyet doğrusu, girişimcinin sahip olduğu belirli miktar parayla oluşturabileceği değişik girdi bileşimlerini gösterir. Bu doğrunun eğimini iki şekilde belirleyebiliriz.

Şekil 86. Dışbükey Eş-ürün Eğrileri ve Maliyetler



(a)



(b)

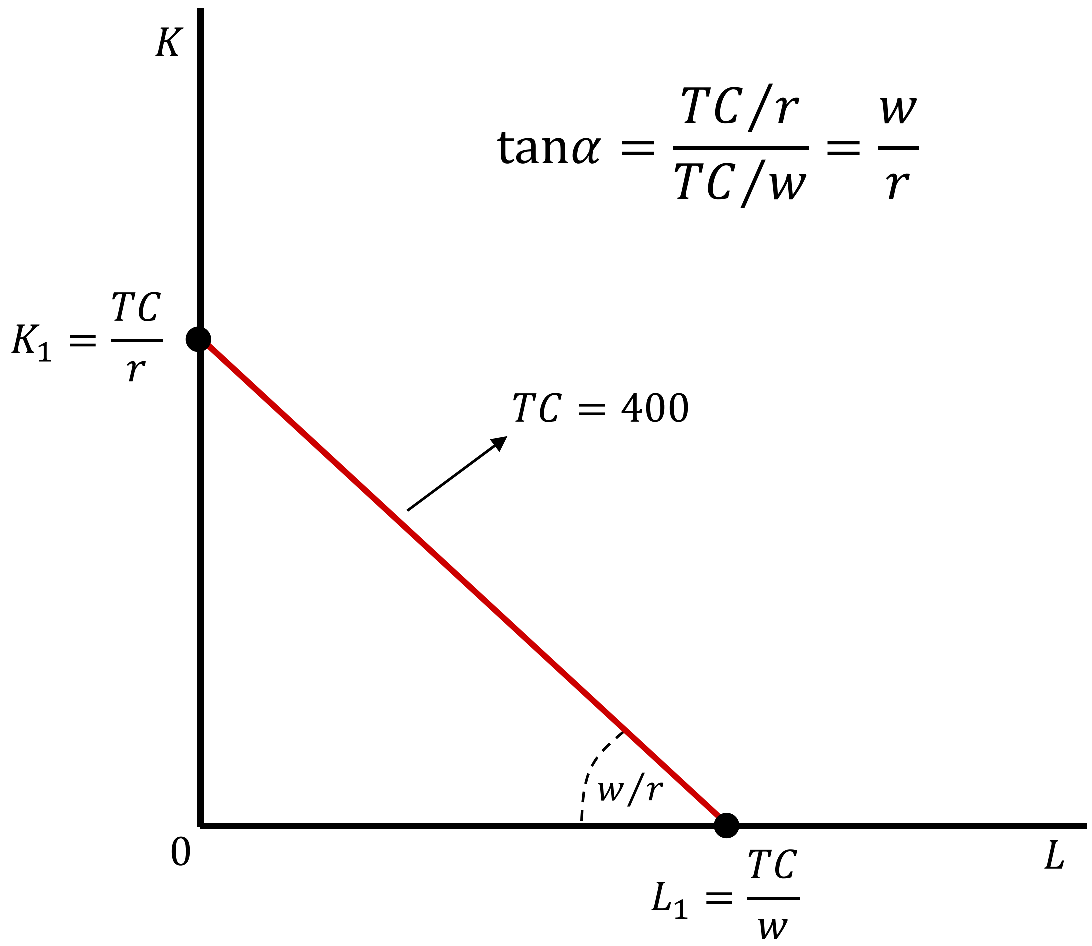
Geometrik olarak AB doğrusunun tanjantı, eğimi verecektir. Buna göre, karşı dik kenarın komşu dik kenara oranını belirleriz (Şekil 87). İkinci yöntemde eş-maliyet doğrusunun denkleminden hareket ederiz.

$$TC = rK + wL$$

$$rK = TC - wL \quad \rightarrow \quad K = \frac{TC}{r} - \frac{w}{r}L \quad \rightarrow \quad \frac{dK}{dL} = -\frac{w}{r}$$

Eş-maliyet doğrusunun eğimi, göreli girdi fiyatlarını ya da göreli girdi maliyetini gösterir. Örneğin Şekil 86b'de AB doğrusunun eğimi -1'dir. Yani sermaye ve işgücü girdileri eş-ölçüde göreli maliyete sahiptir. Girişimci 20 birim yerine 19 birim sermaye (bu örnekte reçel kavanozu) kullanımına geçerse (A'dan D'ye) 20 TL kazancı olur. Ancak işgücü girdisini 1 birim artırırsa, 20 TL harcama yapacağından, AB eş-maliyet doğrusunun üzerindeki E noktasına geçiş yapmış olur.

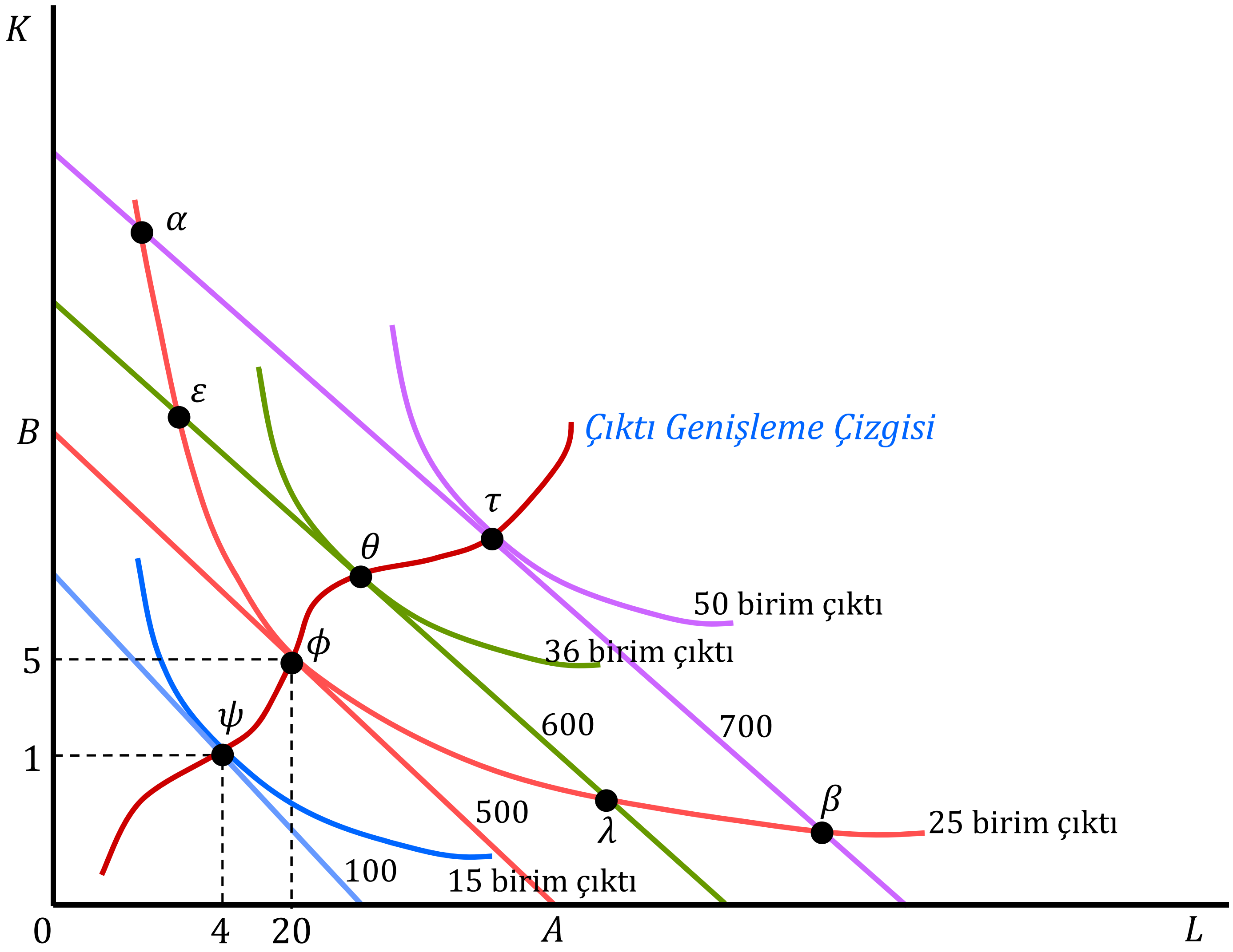
Şekil 87. Eş-maliyet Doğrusunun Eğiminin Belirlenmesi



Veri bir üretim düzeyini en düşük maliyetle gerçekleştirmek için, veri üretim düzeyini gösteren eş-ürün eğrisine teğet olan orijine en yakın eş-maliyet doğrusunu seçmelidir. Bunu Şekil 88'i kullanarak açıklayalım. Şekilde dört farklı üretim düzeyi (eş-ürün eğrisi) ve harcama düzeyi (eş-maliyet doğrusu) dikkate alınmıştır. Örneğin 25 birim çıktı elde edebilmek için gereken en düşük maliyet düzeyini belirlemeye çalışalım.

25 birim ürünü, 100 birim harcamayla elde edemeyiz. 700 birim harcama ile (α ve β noktaları) ya da 600 birim harcama ile (ε ve λ noktaları) elde etmek olanaklıdır. Ancak bunların her ikisi de en düşük maliyet düzeyleri değildir. 500 birim harcama düzeyini gösteren eş-maliyet eğrisi, en düşük harcama düzeyini göstermektedir.

Şekil 88. Çıktı Genişleme Çizgisi



Optimal girdi kullanım düzeyi, eş-maliyet eğrisinin eş-ürün eğrisine teğet olduğu noktada belirlenmektedir. Şekil 88'den, optimal girdi kullanımının 5 birim sermaye, 20 birim işgücü bileşimi olduğu görülüyor.

Şimdi optimal girdi bileşimini matematiksel olarak görelim. Bunun için üretim düzeyi veriyken, harcama düzeyini (eş-maliyet fonksiyonunu) minimize etmeye çalışacağız. Aşağıda Lagrange fonksiyonu kurulmuş, birinci sıra koşullar elde edilerek, optimal girdi kullanım kuralı elde edilmiştir.

$$Z(K,L) = (rK + wL) + \lambda[U_0 - U(K,L)]$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathcal{L}Z}{\partial K} = r - \lambda \dfrac{\partial U}{\partial K} = 0 \quad \rightarrow \quad r = \lambda \dfrac{\partial U}{\partial K} \\[2em] \dfrac{\partial Z}{\partial L} = w - \lambda \dfrac{\partial U}{\partial L} = 0 \quad \rightarrow \quad w = \lambda \dfrac{\partial U}{\partial L} \end{array}\right\} \quad \frac{w}{r} = \frac{MP_L}{MP_K} = MRTS_{KL}$$

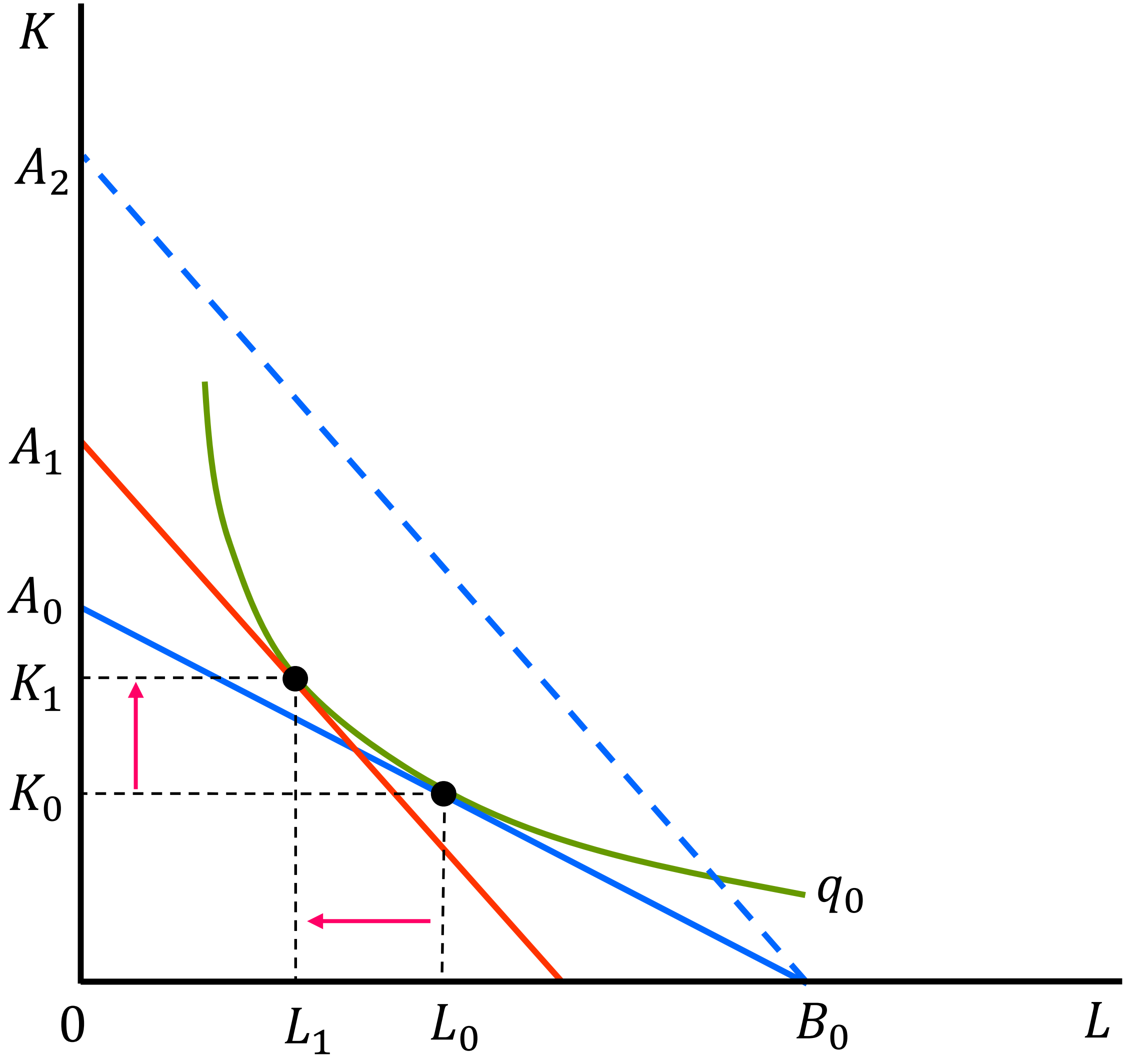
$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = U_0 - U(K,L) = 0$$

Şimdi ekonominin tümünde tam rekabetçi piyasa varsayımı altında, örneğin yurt dışından büyük miktarda bir sermaye girişi gerçekleşirse, bozulan optimal dengenin nasıl işleyeceğine bakalım. Büyük miktarda sermaye gelişi faiz oranlarını düşürür, dolayısıyla göreli girdi fiyatları (w/r) artar. Böyle bir durumda girişimci açısından hem ikame hem de gelir etkisi oluşur. Girişimci, göreli olarak pahalılaşan işgücü yerine sermaye ikame ederek, aynı üretim düzeyini bir öncekinden daha düşük harcama ile gerçekleştirebilir. Şekil 89'dan da değişimi görebiliriz.

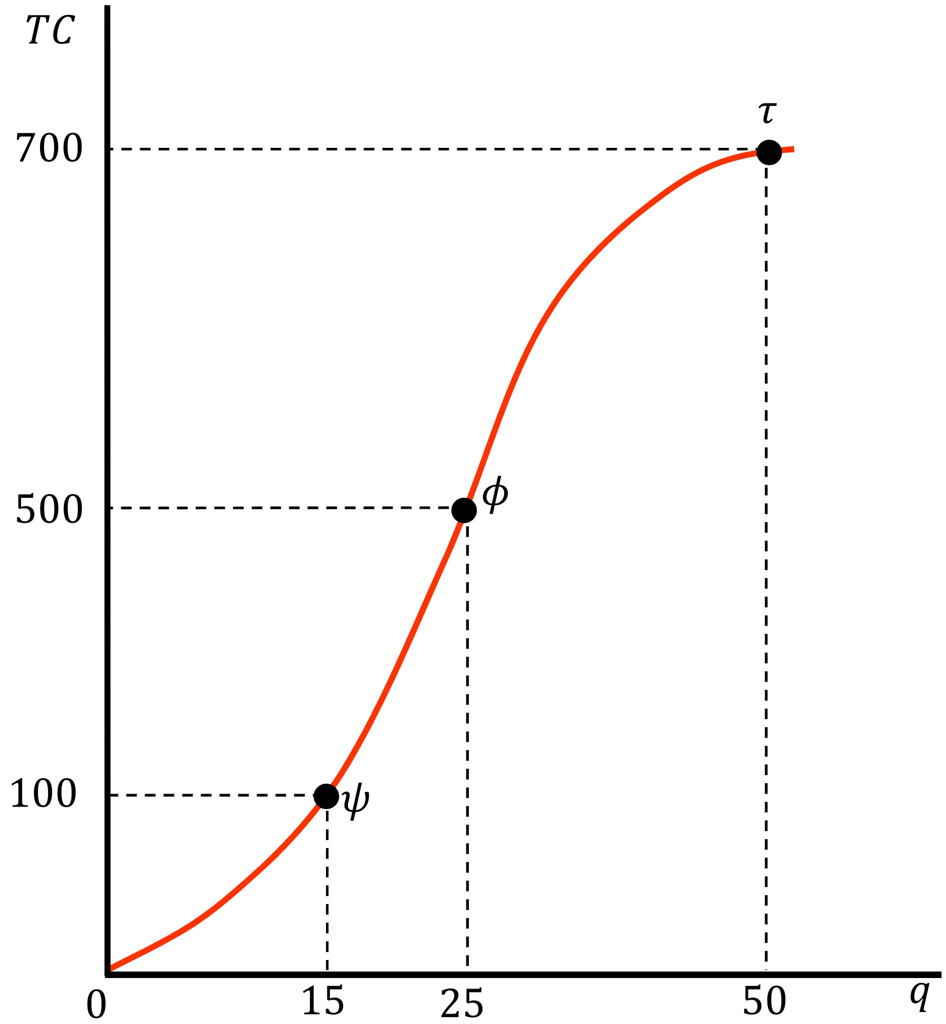
$$r\downarrow \longrightarrow \left(\frac{w}{r}\right)\uparrow \longrightarrow \frac{w}{r} > \frac{MP_L}{MP_K} \longrightarrow \left(\frac{K}{L}\right)\uparrow \longrightarrow \left(\frac{MP_L}{MP_K}\right)\downarrow \longrightarrow \frac{w}{r} = \frac{MP_L}{MP_K}$$

Yukarıda veri üretim düzeyini elde etmek için en düşük maliyet düzeyini veren girdi bileşiminin nasıl belirlendiğini gördük. Eğer her bir üretim düzeyine karşılık gelen en düşük maliyet düzeylerini koordinat eksenine işaretlersek, uzun dönem maliyet fonksiyonunun grafiğini elde ederiz. Bu eğri maliyet-çıktı uzayında, üretim genişleme çizgisinin bir başka görüntüsüdür (Şekil 90).

Şekil 89. Dışsal Şokların Firma Dengesine Etkisi



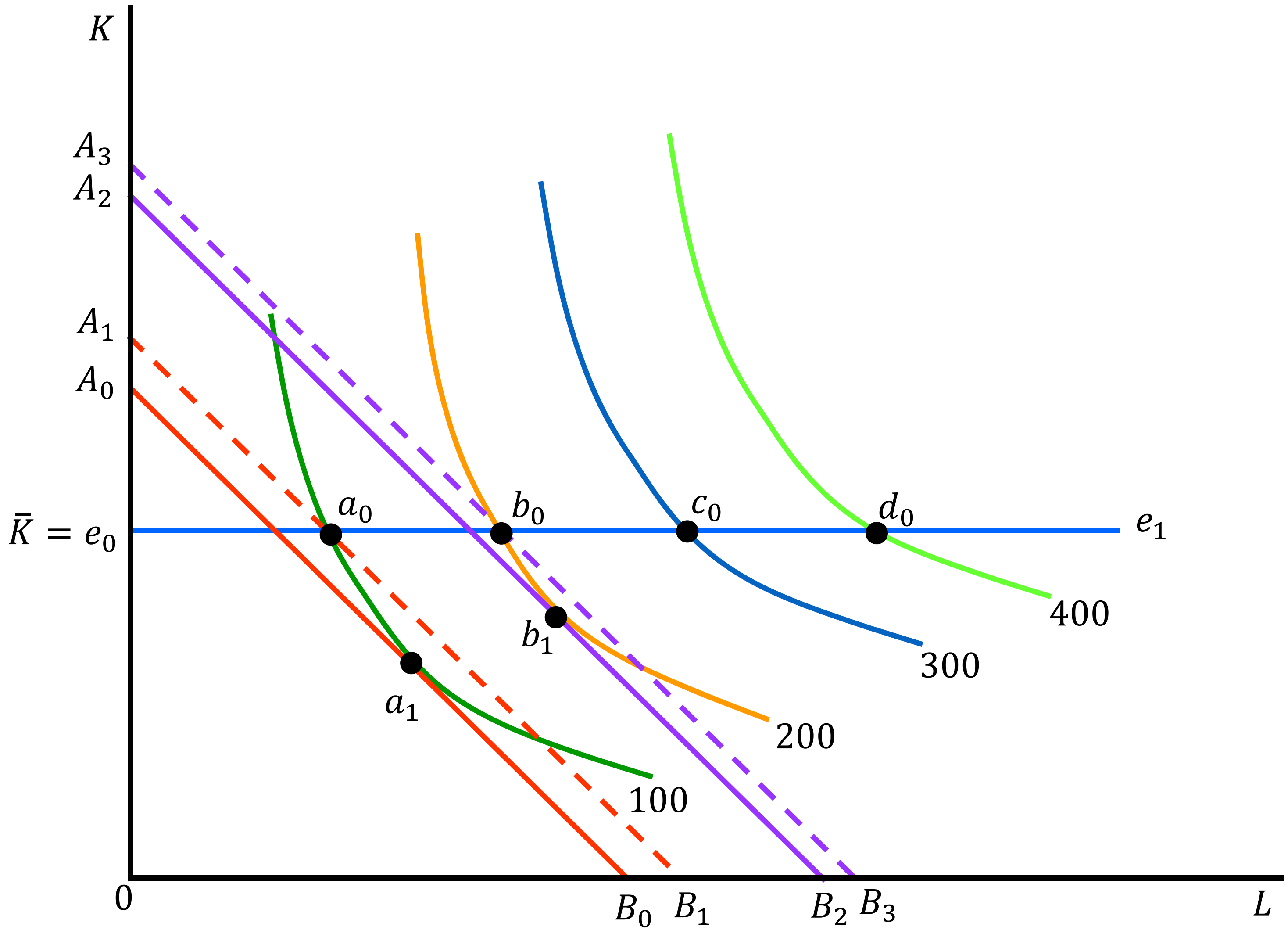
Şekil 90. Toplam Maliyet Eğrisi



Bir üretici kısa dönemde çalışıyorsa, üretim girdilerinden en azından biri sabit olduğundan, uzun dönemdeki gibi girdileri optimal bileşime ayarlama esnekliğine sahip değildir. Böyle bir durumda üretici, değişken girdiyi, istenilen üretim düzeyini gerçekleştirebilecek olan en az düzeyde ayarlayarak optimal girdi bileşimini belirler. Bunu Şekil 91 yardımıyla görebiliriz. Burada işgücü değişken, sermaye sabit girdilerdir. Bu nedenle üretimde kullanılan sermaye miktarı $e_0 e_1$ yatay eğrisiyle belirtilmiştir.

Örneğin 100 birimlik üretim yapabilmek için kısa dönemde kullanılacak optimal girdi bileşimi a noktasıdır. Bu noktada eş-maliyet ve eş-ürün eğrilerinin teğet olmadıklarına dikkat ediniz. Yani uzun dönemdeki optimal girdi bileşimi denge koşulu yerine gelmemektedir. Eğer üretici uzun dönemde çalışıyor olsaydı, a_1 noktasına karşılık gelen girdi bileşimini kullanabilecekti. Bu durumda her iki girdi de değişkendir ve optimal girdi bileşim koşulu da yerine gelmektedir. Kısa dönem maliyeti genellikle uzun dönem maliyetinden yüksektir. Bu şekildeki üretici için kısa dönem maliyet fonksiyonu, her bir üretim düzeyi için katlanılan a_0, b_0, c_0 ve d_0 maliyet düzeyleri ile belirlenir.

Şekil 91. Kısa Dönemde Optimal Üretici Davranışı

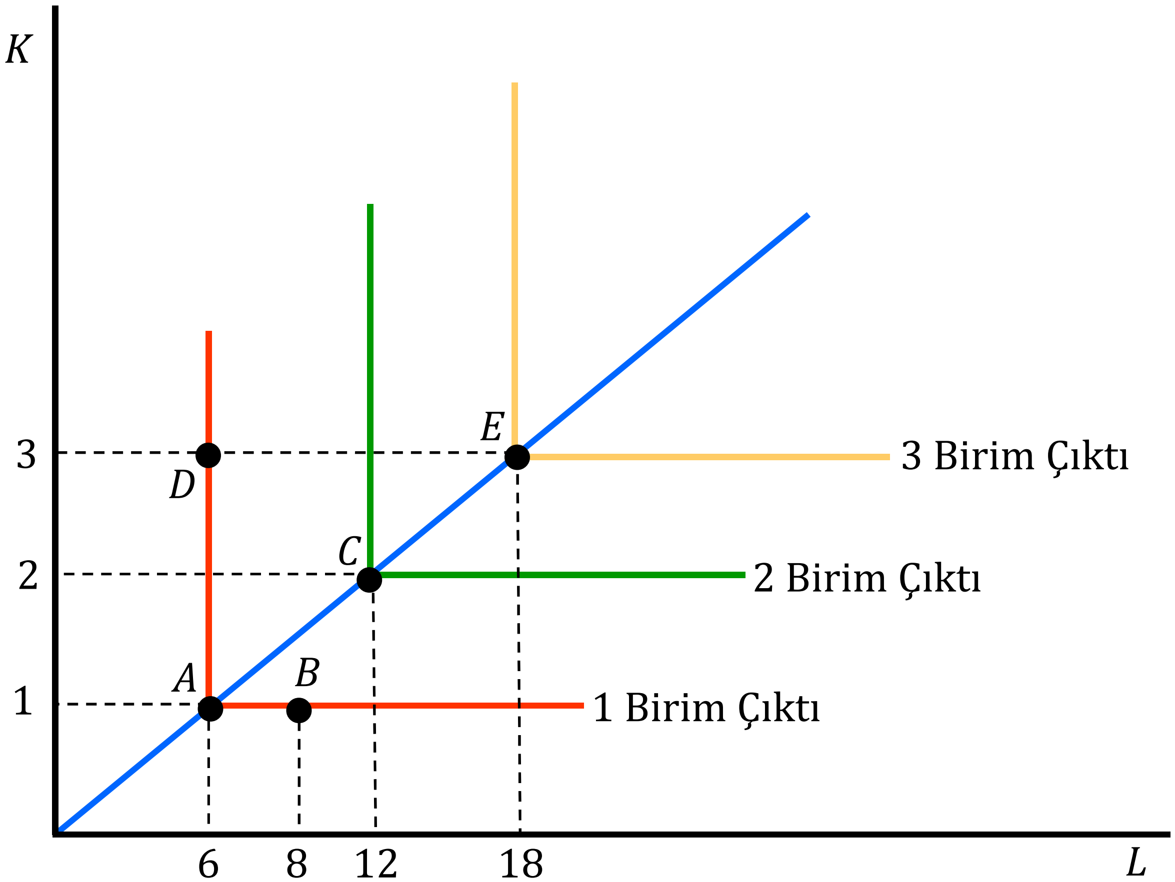


Belirli bir miktar ürün elde etmek için girdilerin oranı tanımlanmışsa (sabitse), buna *Leontief üretim fonksiyonu* diyoruz. Örneğin 1 birim çıktı elde etmek için 1 birim sermaye ve 6 birim işgücü kullandığımızı varsayalım. Yani sermaye ve işgücü 1/6 oranında kullanılmalıdır. Bu ifadeyi matematik biçimiyle şöyle yazabiliriz:

$$Q = \min(1\,Sermaye,\ \frac{1}{6}\,\text{İş}g\text{ü}c\text{ü})$$

Şekil 92’de eş-ürün eğrileri Leontief tipi teknolojiyi yansıtacak şekilde L biçimlidir. Bu tür bir eş-ürün eğrisi, belirli bir ürünü elde etmenin tek bir yolu olduğunu göstermektedir. A, C ve E noktalarındaki girdi bileşimleri, $K/L = 1/6$ üretim tekniğinin olanaklı olduğunu, sermaye ve işgücü arasında hiçbir ikamenin bulunmadığını vurgulamaktadır. Örneğin sermaye 1 birimken işgücü kullanımını 8 birime çıkartsak, üretim miktarı değişmeyecektir. Yani 1 birimdir.

Şekil 92. Leontief Tipi Üretim Süreci

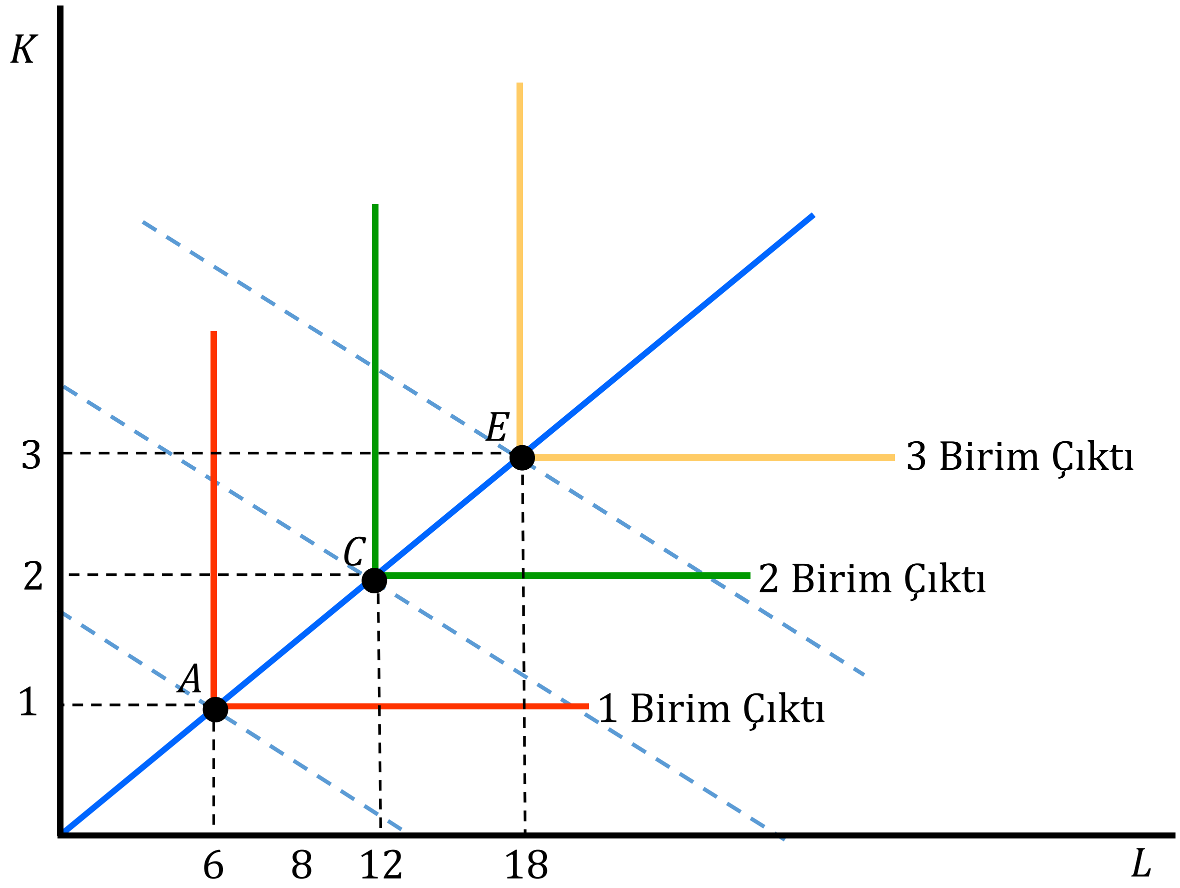


Bir başka anlatımla, Leontief tipi eş-ürün eğrisi boyunca marjinal teknik ikame oranı sıfırdır. İşgücü kullanımı 6 birimden 8 birime çıkmasına rağmen, işgücünün marjinal verimliliği değişmeden kalmıştır. Daha çok ürün elde etmek istiyorsak, 1/6 oranını koruyacak şekilde her iki girdiyi birlikte artırmalıyız. Bu anlamda Leontief üretim fonksiyonu, ölçeğe göre sabit getirilidir. Girdileri iki katına çıkarırsak, üretim de iki kat artmaktadır. Leontief üretim fonksiyonu, sıfır ikame esnekliğine sahiptir. Sermaye ve işgücü arasında ikame olanaksızdır.

Leontief üretim fonksiyonunun ne tür bir maliyet fonksiyonuna yol açtığı görebilmek için, bir önceki aşamada kullandığımız maliyet fonksiyonu oluşturma yöntemini uygularız. Bunu Şekil 93 yardımıyla izleyebiliriz. Şekilde her bir üretim düzeyini elde edebilmek için gereken en düşük maliyet düzeylerini gösteren eş-maliyet eğrileri, eş-ürün eğrilerine (A, C ve E gibi köşe noktalarında) teğet çizilmiştir. Ancak bu teğet noktalarında, temel denge koşulu sağlanamamaktadır. Temel denge koşulu şöyleydi:

$$\frac{w}{r} = \frac{MP_L}{MP_K} = MRTS_{KL}$$

Şekil 93. Leontief Tipi Üretim Süreci ve Maliyetler



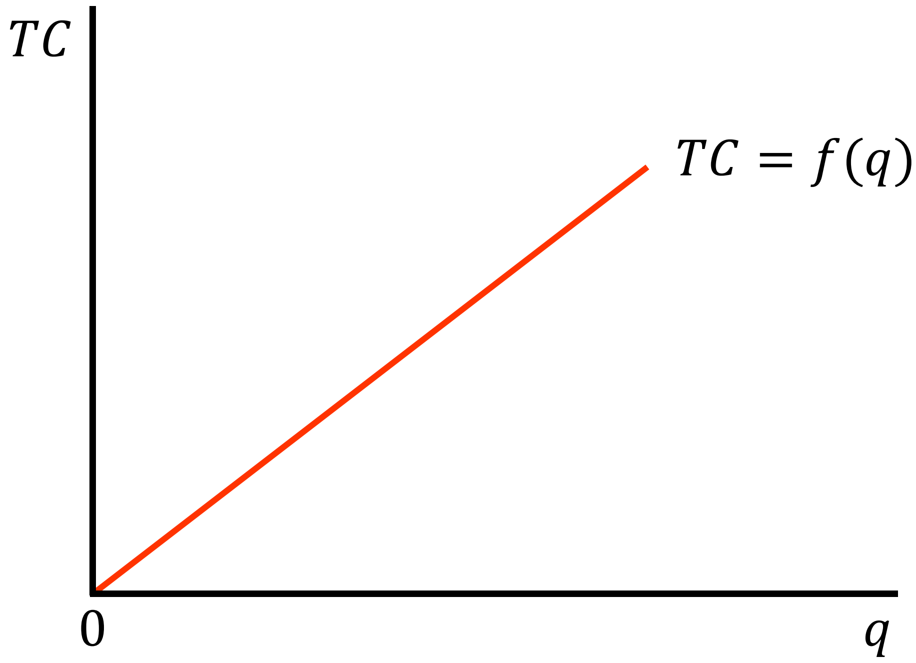
A, C ve E noktalarında temel denge koşulu sağlanmadığından, optimal girdi bileşimini belirleyebilmek için, A noktasının solundan sağına hareket ederek $MRTS$ değerine bakacağız. A'nın solunda eş-ürün eğrisi dik olduğundan $MRTS$ değeri sonsuz; sağında yatay olduğundan sıfırdır. A noktası için şu genel sonucu üretebiliriz:

$$MRTS_{A\prime nın\ Sağı} < \frac{w}{r} < MRTS_{A\prime nın\ Solu}$$

A, noktasında her girdinin birim değeri 20 TL ise, bir birim çıktı elde etmenin maliyeti $6(20) + 1(20) = 140$'dır. Dolayısıyla B noktasında da 280 birimdir. Üretim genişleme çizgisinin doğrusal, ölçeğe göre getirinin sabit olduğuna dikkat edelim.

Bu nedenle, girdilerin (harcamanın) iki katına çıkarılması, üretimi de iki kat artırmaktadır. Yani Leontief üretim fonksiyonundan elde edeceğimiz maliyet fonksiyonu da doğrusaldır (Şekil 94).

Şekil 94. Leontief Tipi Üretim Süreci ve Toplam Maliyetler



Leontief üretim fonksiyonunun, tek üretim tekniğinin kullanımına izin verdiğini gördük. Buna karşın Cobb-Douglas üretim fonksiyonu, veri üretim düzeyini elde etmek için sonsuz üretim tekniğinin kullanılabilmesine olanak sağlamaktadır. Genel olarak Cobb-Douglas üretim fonksiyonunu şöyle yazabiliriz :

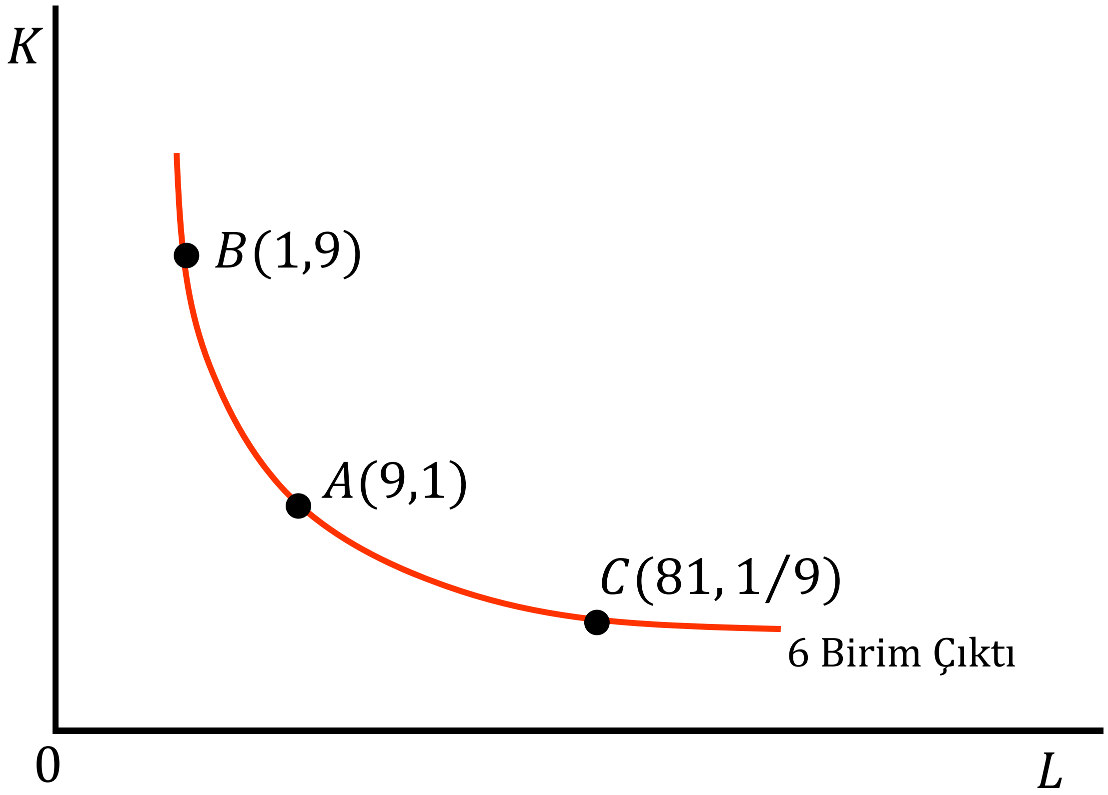
$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta}, \qquad \alpha > 0, \beta > 0$$

Örneğin 9 birim işgücü, 1 birim sermayeye sahipsek ve $\alpha = 0{,}5, \beta = 0{,}5, A = 2$ ise;

$$Q = 2(1)^{1/2}(9)^{1/2} = 6$$

Şekil 95'te eş-ürün eğrisi Cobb-Douglas üretim fonksiyonuna göre çizilmiştir. Bu eş-ürün eğrisi, 6 birimlik üretim miktarının sonsuz üretim tekniği, yani sermaye-işgücü bileşimi ile üretilebileceğini söylemektedir. Biz burada yalnızca üç tane örnek nokta aldık. B noktasında 1 birim işgücü, 9 birim sermaye kullanarak 6 birim ürün elde edebiliyoruz. Aynı şekilde A ve C noktalarındaki girdi bileşimlerini de kullandığımızda 6 birim üretim yapabiliriz.

Şekil 95. Cobb-Douglas Üretim Fonksiyonu ve Kayıtsızlık Eğrisi



Yukarıda ele aldığımız örnek Cobb-Douglas üretim fonksiyonu ölçeğe göre sabit getiriye sahiptir: $\alpha + \beta = 1$. Yani girdi miktarlarını iki katına çıkarırsak, üretim de iki kat artacaktır.

Cobb-Douglas üretim fonksiyonu, *homotetik üretim fonksiyonları*na bir örnektir. Bir homotetik üretim fonksiyonunda girdileri λ ölçüsünde artırdığımızda, üretim de λ ölçüsünde artar.

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

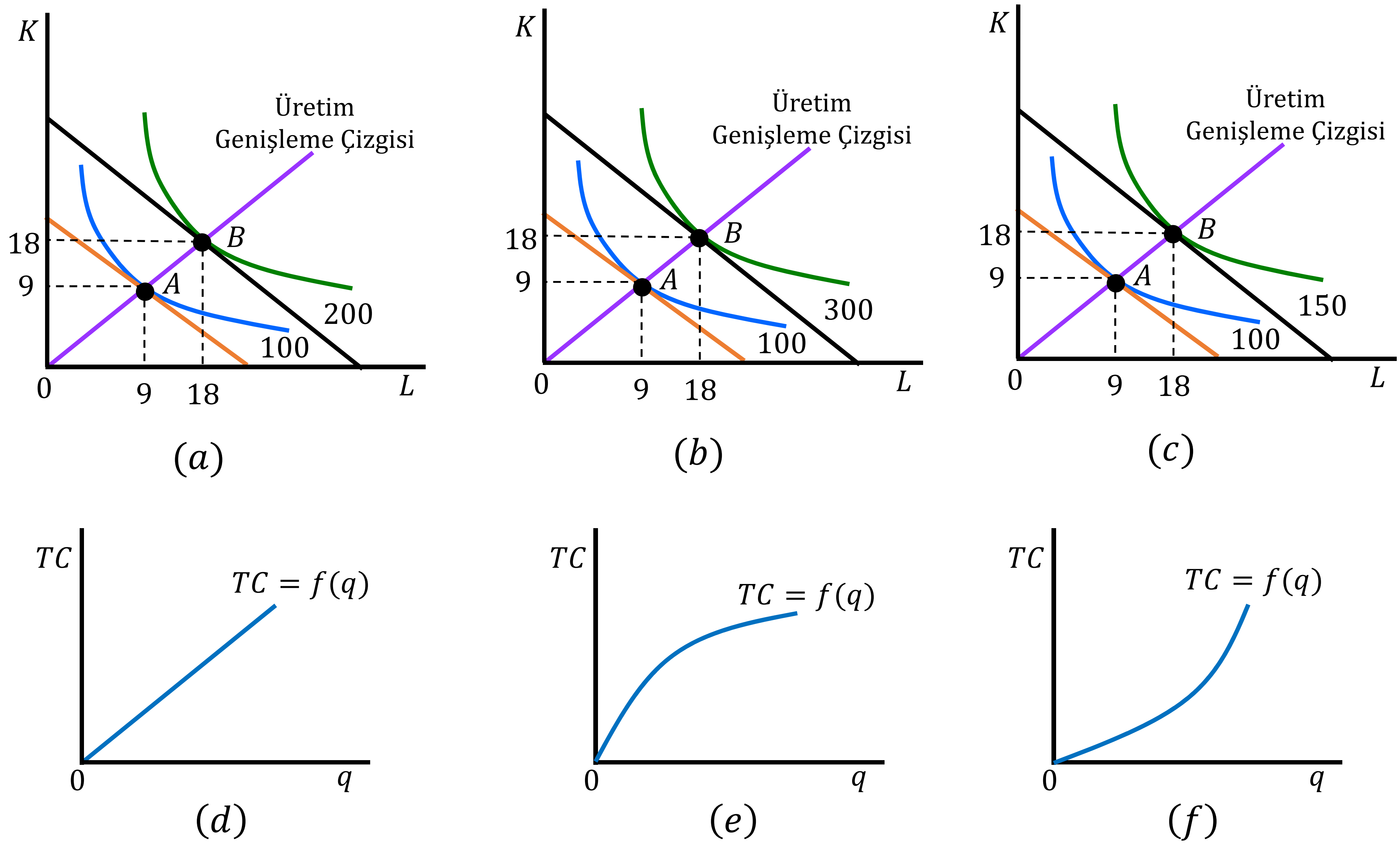
$$Q^* = A(\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{\beta} \quad \rightarrow \quad Q^* = \lambda^{\alpha}\lambda^{\beta}AK^{\alpha}L^{\beta}$$

$$Q^* = \lambda^{\alpha+\beta}AK^{\alpha}L^{\beta} \quad \rightarrow \quad Q^* = \underbrace{\lambda^{\alpha+\beta}Q}_{Q}$$

Şekil 4.12'de, farklı parametrelere sahip olan Cobb-Douglas üretim fonksiyonları *a*, *b*, *c* grafiklerinde, bunlara karşılık gelen maliyet fonksiyonları da *d*, *e*, ve *f* grafiklerinde çizilmiştir. *a* grafiğinin ölçeğe göre sabit getiri, *b* grafiğinin artan getiri, *c* grafiğinin de azalan getiriye sahip olduğuna dikkat ediniz.

Ölçeğe göre sabit getiri durumunda girdileri (harcamayı) iki katına çıkarttığımızda, üretim de aynı ölçüde artmaktadır. Yani üretim miktarı ile maliyet arasında sabit ve doğrusal bir ilişki vardır. *b* grafiğinde ise üretim, girdi artışından daha hızlı arttığından, maliyetler üretim artışından yavaş gitmekte, *c* grafiğinde de bunun tam tersi bir durum yaşanmaktadır.

Şekil 96. Farklı Getiri Durumlarında Cobb-Douglas Üretim Fonksiyonu ve Toplam Maliyetler



Bir üretici niçin sermaye ve işgücünü birbirine ikame etmek ister? Bunun yanıtı, girdilerin göreli fiyatlarında yatmaktadır. Örneğin sermaye işgücüne göre daha pahalı bir girdi haline dönüşürse, üretici daha çok işgücü kullanımına yönelir. İkame esnekliği, göreli girdi fiyatlarındaki değişme karşısında, girdilerin birbirlerini ne ölçüde ikame ettiklerini gösterir. Bu kavramı daha önce açıklamıştık. İkame esnekliğini şöyle gösterebiliriz:

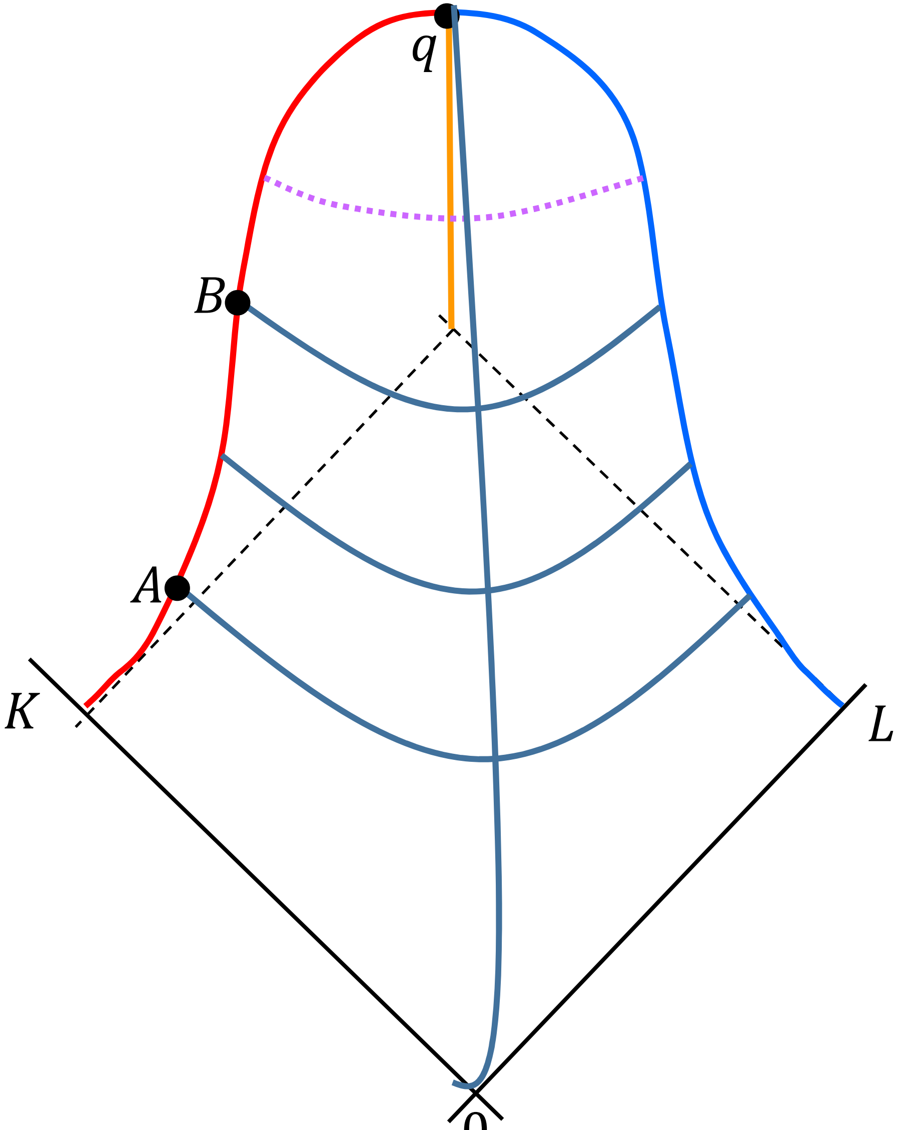
$$\sigma = \frac{\dfrac{\Delta(K/L)}{(K/L)}}{\dfrac{\Delta(w/r)}{(w/r)}}$$

Bir üretici kısa dönemde hem sabit hem de değişken maliyetlere sahiptir.

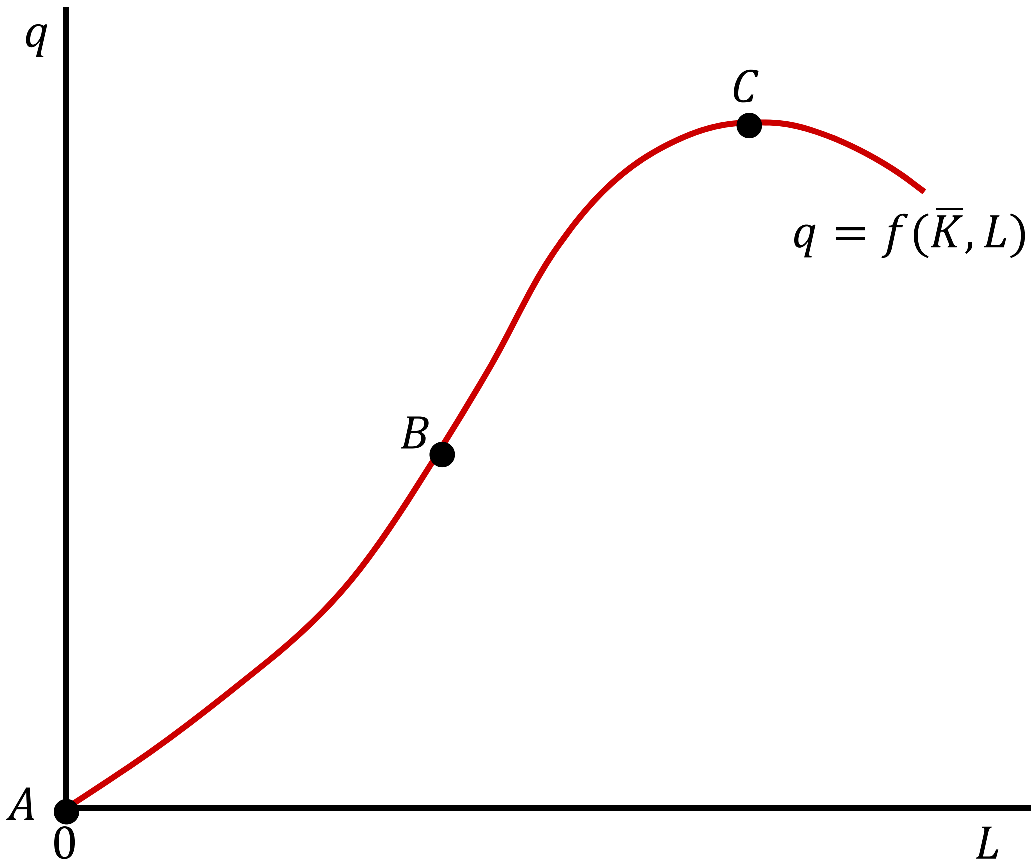
Sabit maliyetler, üretimin sabit girdilerinin yol açtığı maliyetlerdir ve üretim miktarından bağımsızdır. Kısa dönemde sermaye malları (binalar, makineler) sabit olduğundan, bunlara yapılan harcamalar sabit maliyetleri oluşturur.

Değişken maliyetler, üretimin değişebilen girdilerinin yol açtığı maliyetlerdir ve üretim miktarının bir fonksiyonudur. Kısa dönemde işgücü değişken girdi olduğundan, işgücü kullanımı için yapılan harcamalar değişken maliyetleri oluşturur. Şekil 97a uzun dönemde ve 97b kısa dönemde üretim miktarındaki değişmeyi göstermektedir.

Şekil 97a. İki Girdi ve Üretim Fonksiyonu



Şekil 97b. İki Girdi ve Üretim Fonksiyonu

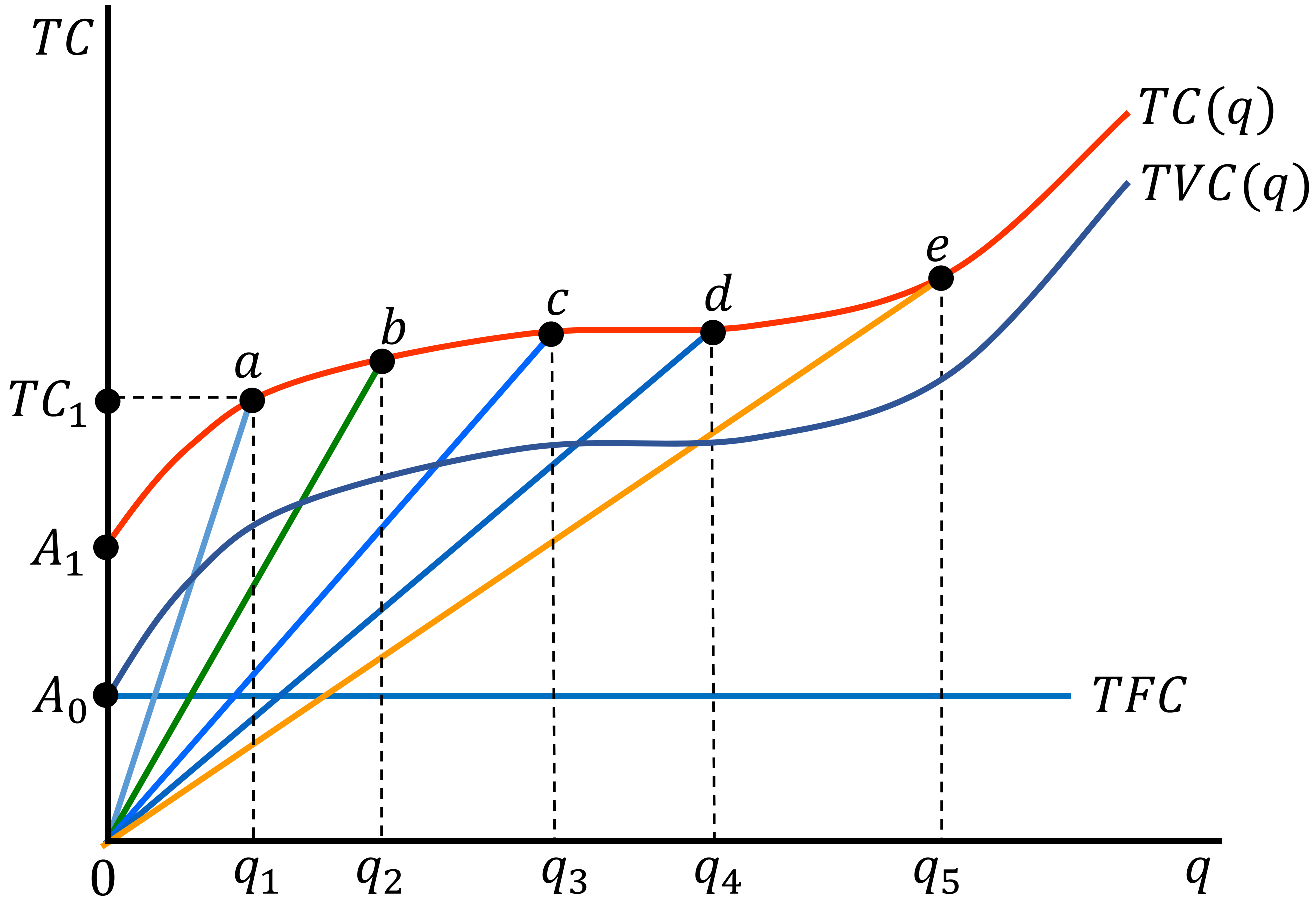


Şekil 98'de kısa dönem toplam maliyet fonksiyonu çizilmiştir. Bu fonksiyonda sermaye miktarı sabitken, veri üretim miktarlarını elde etmenin toplam maliyeti gösterilmiştir. Üretici yalnızca sermaye malı istihdam etmişse, henüz üretim yapamayacağından, yalnızca sermaye malı harcaması kadar bir toplam maliyete katlanacaktır.

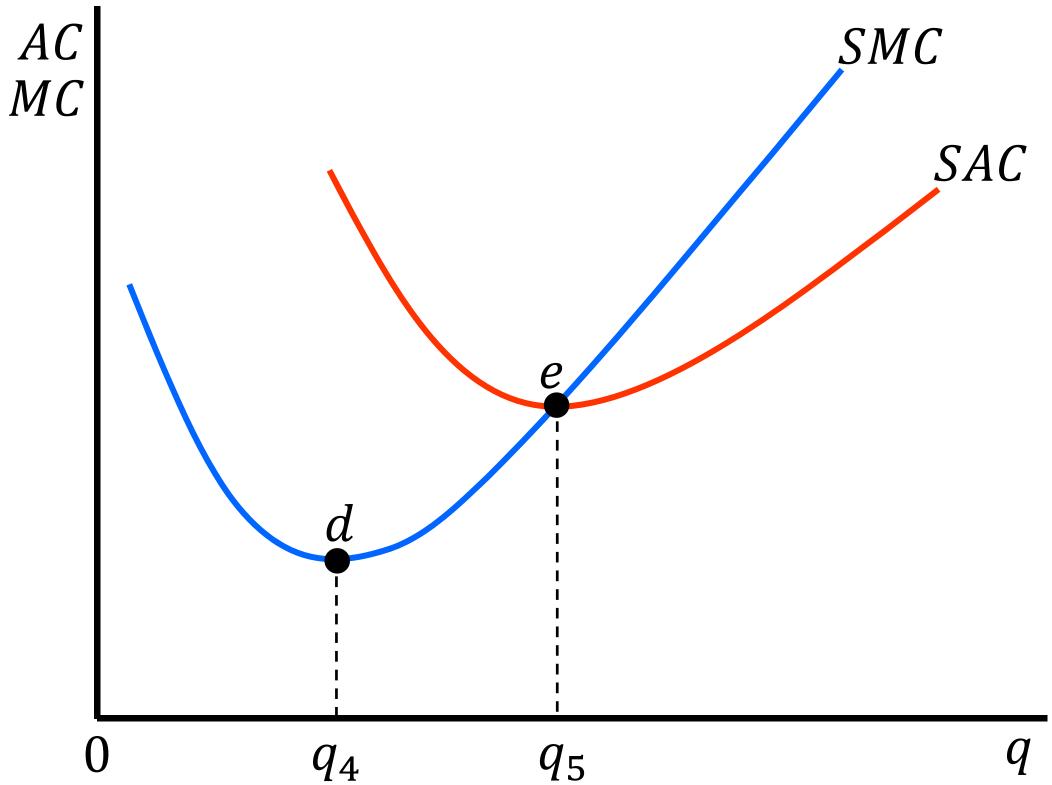
A_0 ile belirtilen bu kısma, *toplam sabit maliyet* (TFC)diyoruz. q arttıkça, TC'nin değişen kısmı da toplam değişken maliyeti göstermektedir. Buna göre *kısa dönem toplam maliyet (STC), toplam sabit (TFC) ve değişken (TVC) maliyetlerin toplamıdır* diyebiliriz.

$$TC = TFC + TVC$$

Şekil 98. Toplam Maliyet Fonksiyonu



Şekil 99. Kısa Dönem Ortalama ve Marjinal Maliyetler



MC ve AC eğrileri arasındaki ilişki:

$$TC = AC.q \quad , \quad AC = AC(q)$$

$$\frac{dTC}{dq} = \frac{d(AC.q)}{dq} = AC\frac{dq}{dq} + \frac{dAC}{dq}q \quad \rightarrow \quad MC = AC + \frac{dAC}{dq}q$$

$$AC > 0 \quad , \quad q > 0 \quad ise$$

$$\frac{dAC}{dq} < 0 \qquad \Rightarrow \qquad MC < AC$$

$$\frac{dAC}{dq} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad MC = AC$$

$$\frac{dAC}{dq} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad MC > AC$$

Kısa dönem toplam maliyet fonksiyonunun her iki yanını q ile bölelim:

$$\underbrace{\frac{TC}{q}}_{SAC} = \underbrace{\frac{TFC}{q}}_{SAFC} + \underbrace{\frac{TVC}{q}}_{SAVC} \longrightarrow SAC = SAFC + SAVC$$

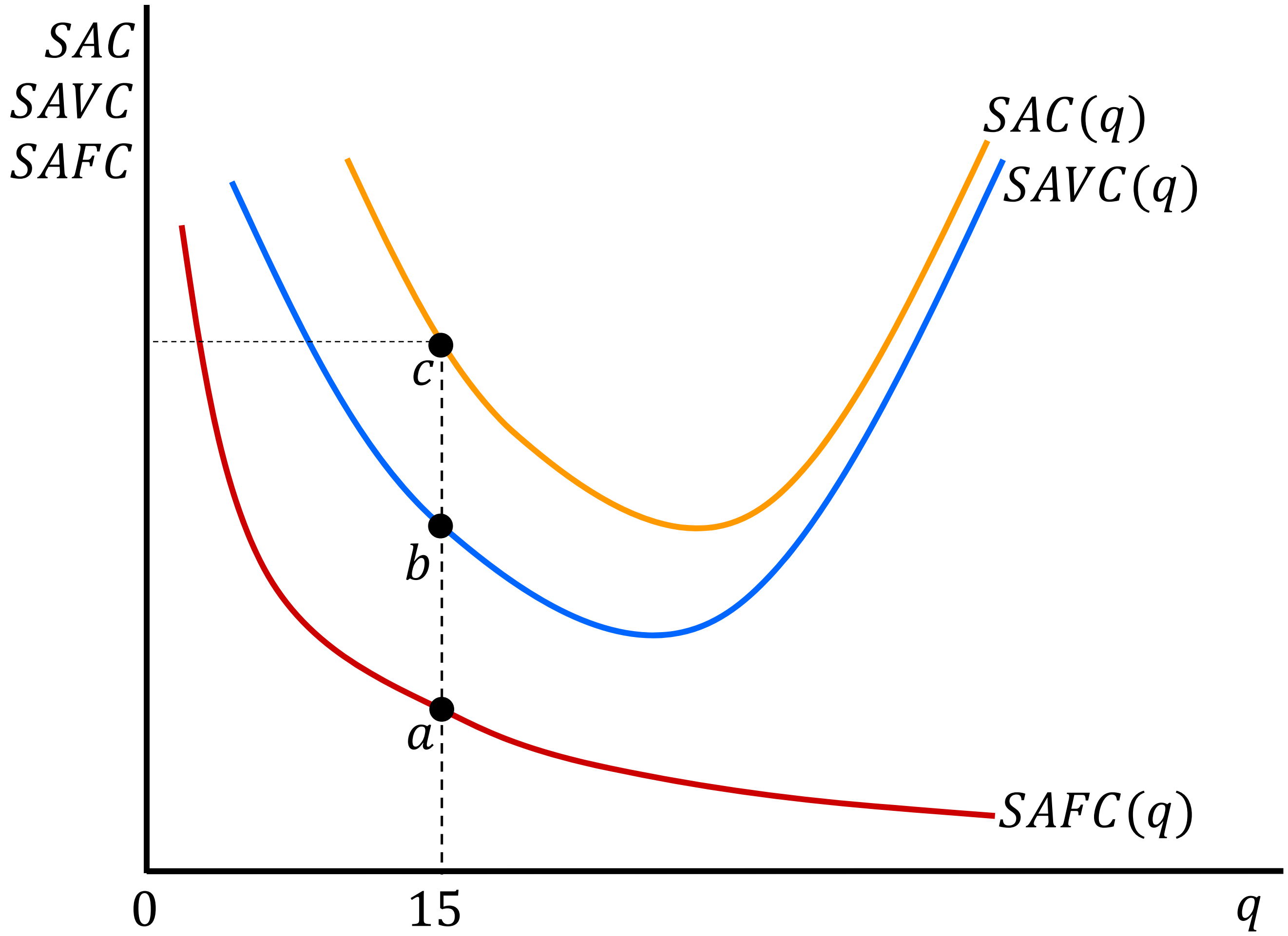
Kısa dönem ortalama maliyet, ortalama sabit maliyet ile ortalama değişken maliyetin toplamına eşittir.

Ortalama maliyet, birim ürün başına düşen maliyettir. Kısa dönem toplam maliyeti ürün miktarına bölerek, kısa dönem ortalama maliyeti elde ederiz.

$$AC = \frac{TC}{q}$$

AC'yi grafik olarak şöyle belirleriz. Orijinden çıkan ve üretim fonksiyonunu kesen her bir doğrunun eğimi (TC/q) bize ortalama maliyeti (AC) verir. Dikkat edilirse AC, e noktasına kadar (yani q_5 üretim düzeyine kadar) azalmakta, q_5 üretim düzeyinde en düşük değerini almakta ve bundan sonra artmaktadır (Şekil 99).

Şekil 100. Kısa Dönem Ortalama Maliyetler



Marjinal maliyet (MC) üretim miktarını Δq kadar artırmanın karşısında toplam maliyette meydana gelen artıştır.

$$MC = \frac{\Delta TC}{\Delta q}$$

Δq sonsuz küçüklükte değişime uğrarsa, marjinal maliyeti şöyle ifade etmemiz gerekir:

$$MC = \lim_{\Delta q \to 0} \left(\frac{\Delta TC}{\Delta q} \right) = \frac{dTC}{dq}$$

İyi huylu bir üretim fonksiyonu ile çalışılıyorsa, marjinal maliyet (MC), TC'nin q'ya göre birinci sıra türevi alınarak belirlenir.

MC'yi grafik üzerinde belirlemek için, her bir üretim düzeyinde TC'ye teğet olan doğrunun eğimini ölçeriz. Dikkat edilirse, bu teğetlerin eğimi önce giderek azalmakta, q_4 üretim düzeyinde en düşük değerine ulaşıp, sonrasında artmaktadır. Hem SAC hem de SMC eğrileri, U biçimli eğrilerdir.

Şimdi de toplam maliyet fonksiyonunun her iki yanının q 'ya göre birinci sıra türevini inceleyelim:

$$\frac{dTC}{dq} = \frac{dTFC}{dq} + \frac{dTVC}{dq}$$

$$\frac{dTC}{dq} = \frac{dTVC}{dq} = SMC$$

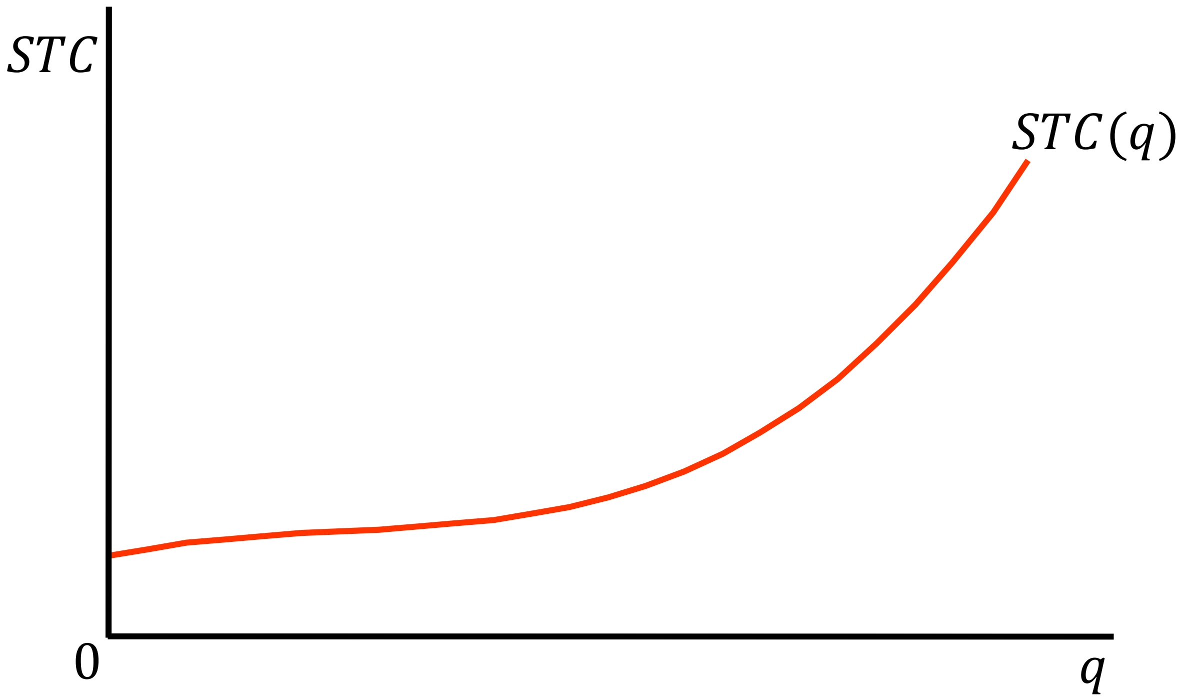
TC 'nin ya da TVC 'nin q'ya göre birinci sıra türevleri, kısa dönem marjinal maliyeti (SMC) verir.

Örnek firmanın kısa dönem toplam maliyet fonksiyonunun aşağıdaki gibi olduğunu düşünelim. Buradan hareketle diğer tüm maliyetleri belirleyelim ve grafikle gösterelim.

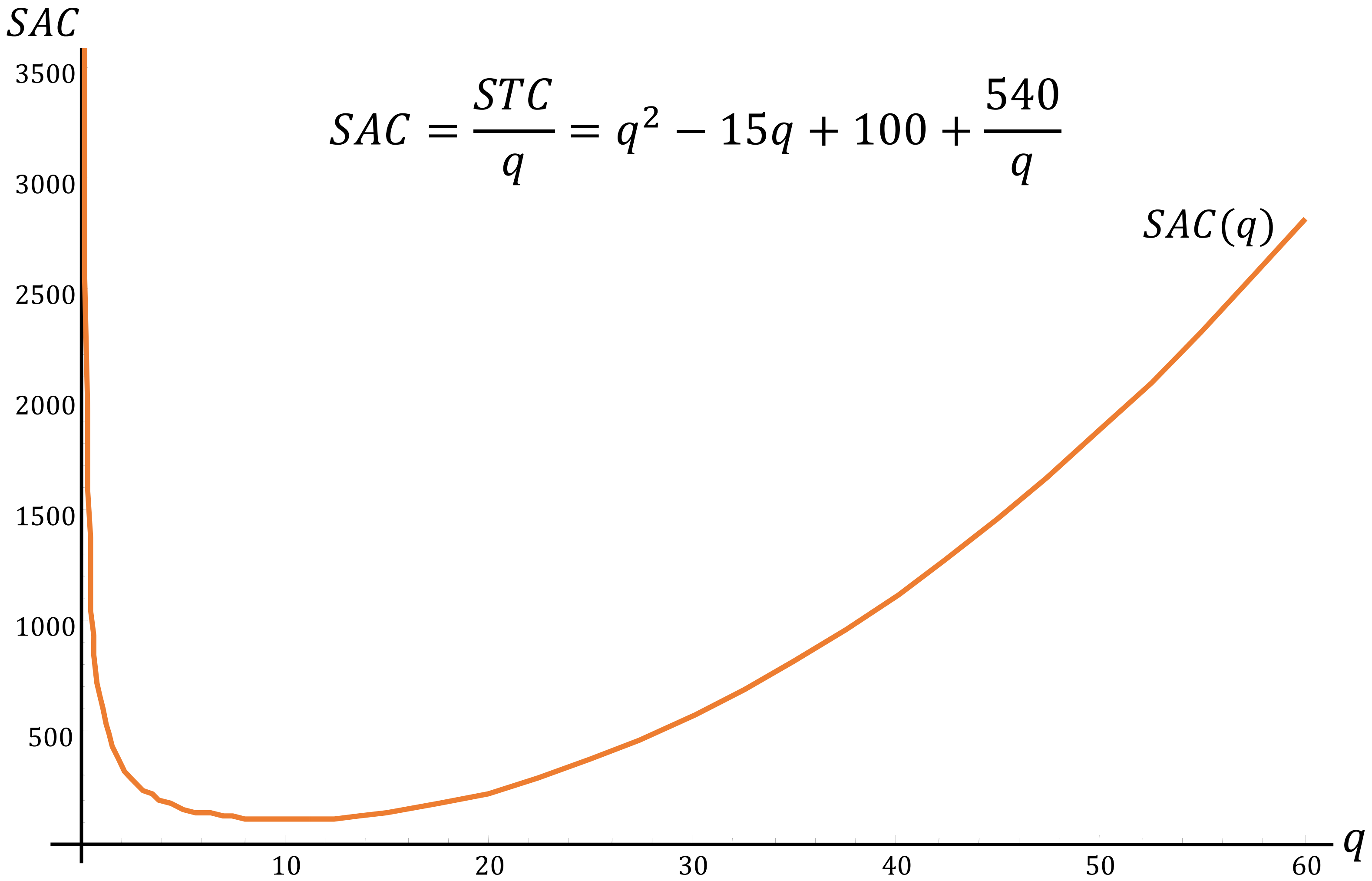
$$STC = q^3 - 15q^2 + 100q + 540$$

Şekil 101a. Kısa Dönem Toplam Maliyet

$$STC = q^3 - 15q^2 + 100q + 540$$

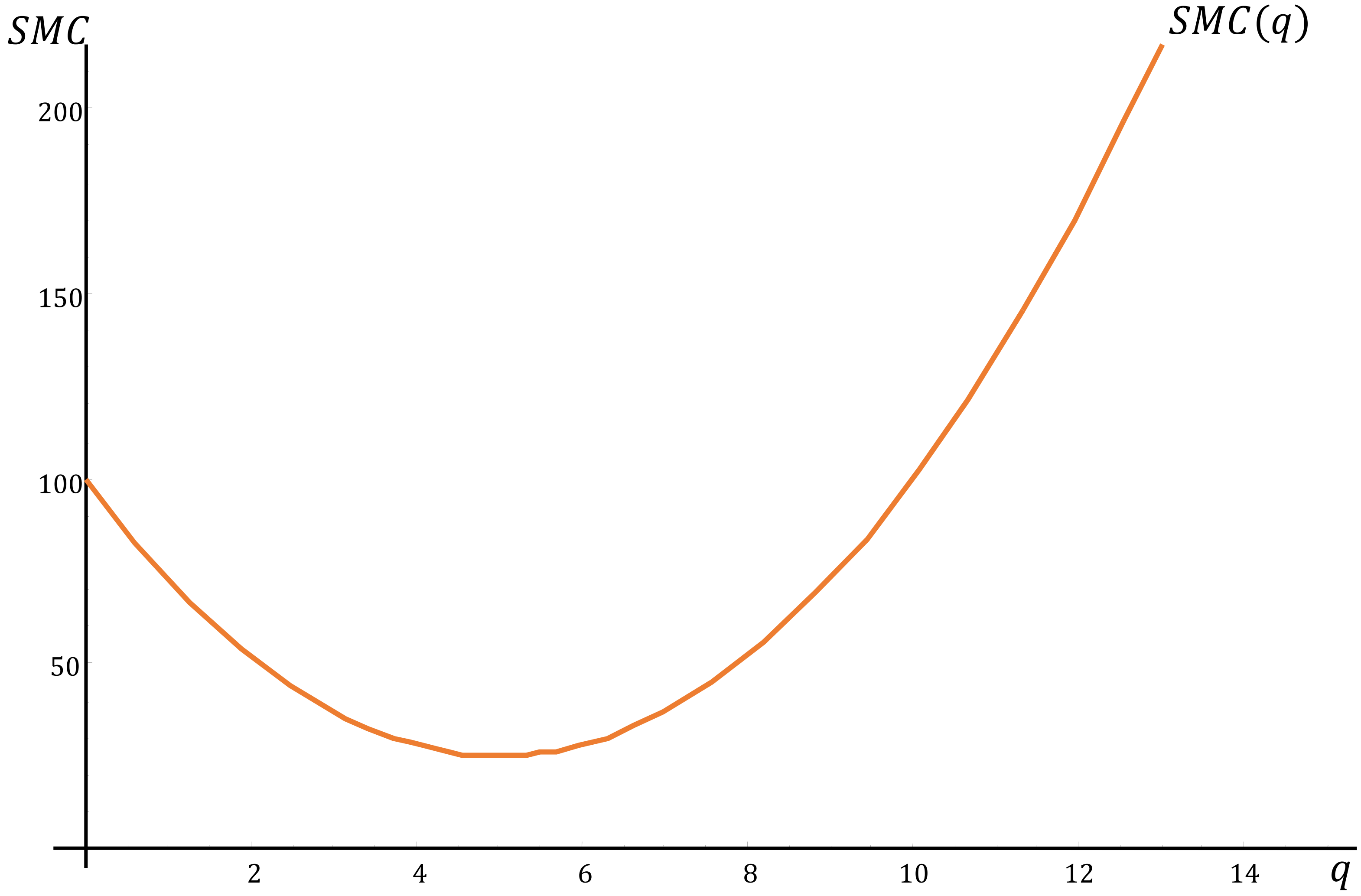


Şekil 101b. Kısa Dönem Ortalama Maliyet



Şekil 101c. Kısa Dönem Marjinal Maliyet

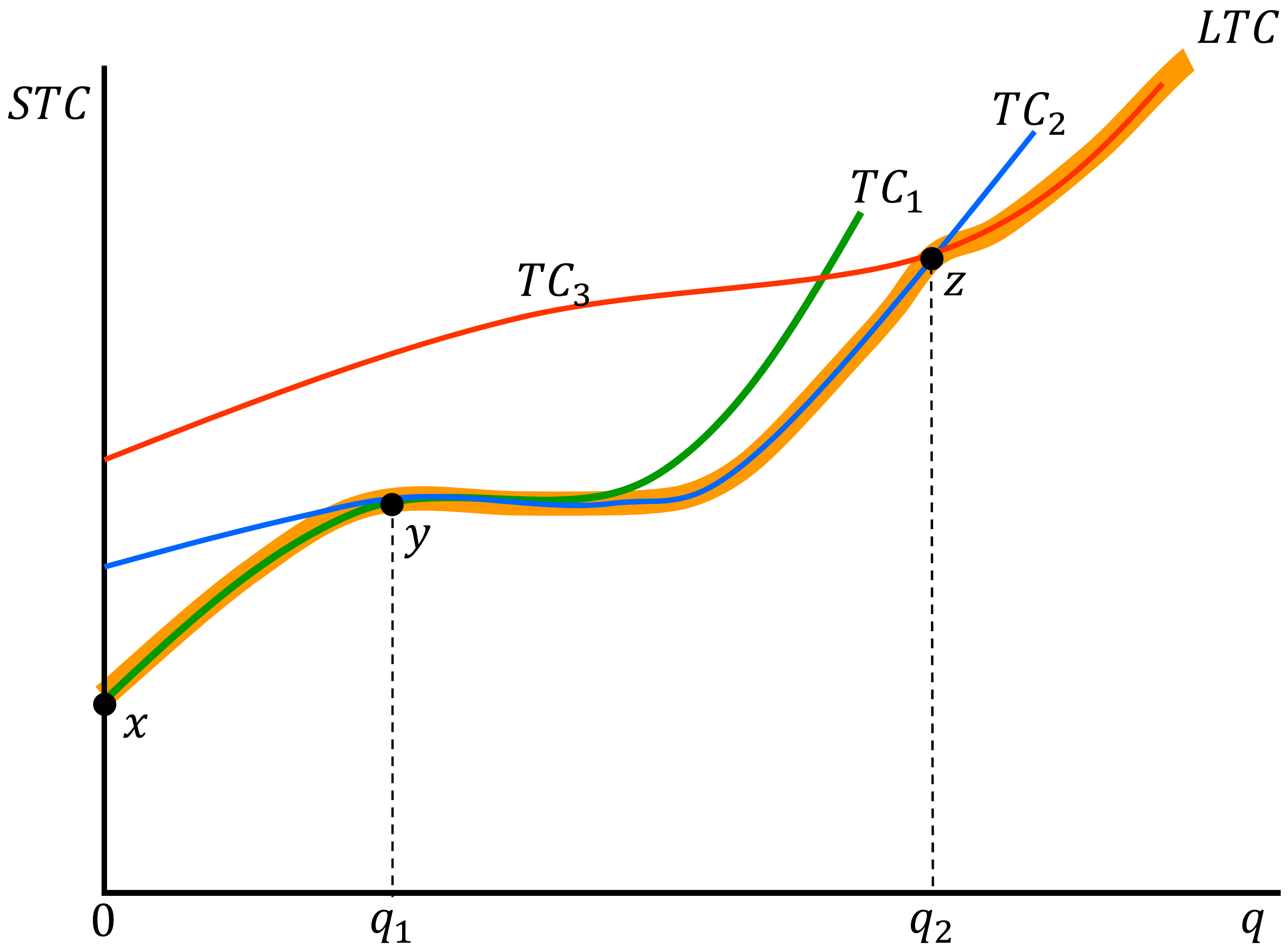
$$SMC = 3q^2 - 30q + 100$$



Yukarıda üretici için kısa dönemde sermayenin sabit bir girdi olduğunu gördük ve maliyet fonksiyonlarını da bu varsayım altında inceledik. Her bir sabit girdi (sermaye) düzeyi için, bir kısa dönem maliyet fonksiyonu oluşacaktır. Üretici, üretmeyi istediği her bir miktar için, toplam maliyetini en düşük kılan sermaye yatırımını ayarlayacaktır. Uzun döneme geçildiğinde, tüm girdiler değişken hale gelecektir. Şekil 102'de kısa döneme ilişkin üç farklı toplam maliyet fonksiyonu çizilmiştir.

Birincisinde kısa dönemde 5, ikincisinde 10, üçüncüsünde 15 birim sermaye malı kullanılmıştır. q_1 miktar üretim düzeyine kadar 5 birim sermaye malı kullanmak, diğerlerine göre daha ucuzdur.

Şekil 102. Uzun Dönem Toplam Maliyet

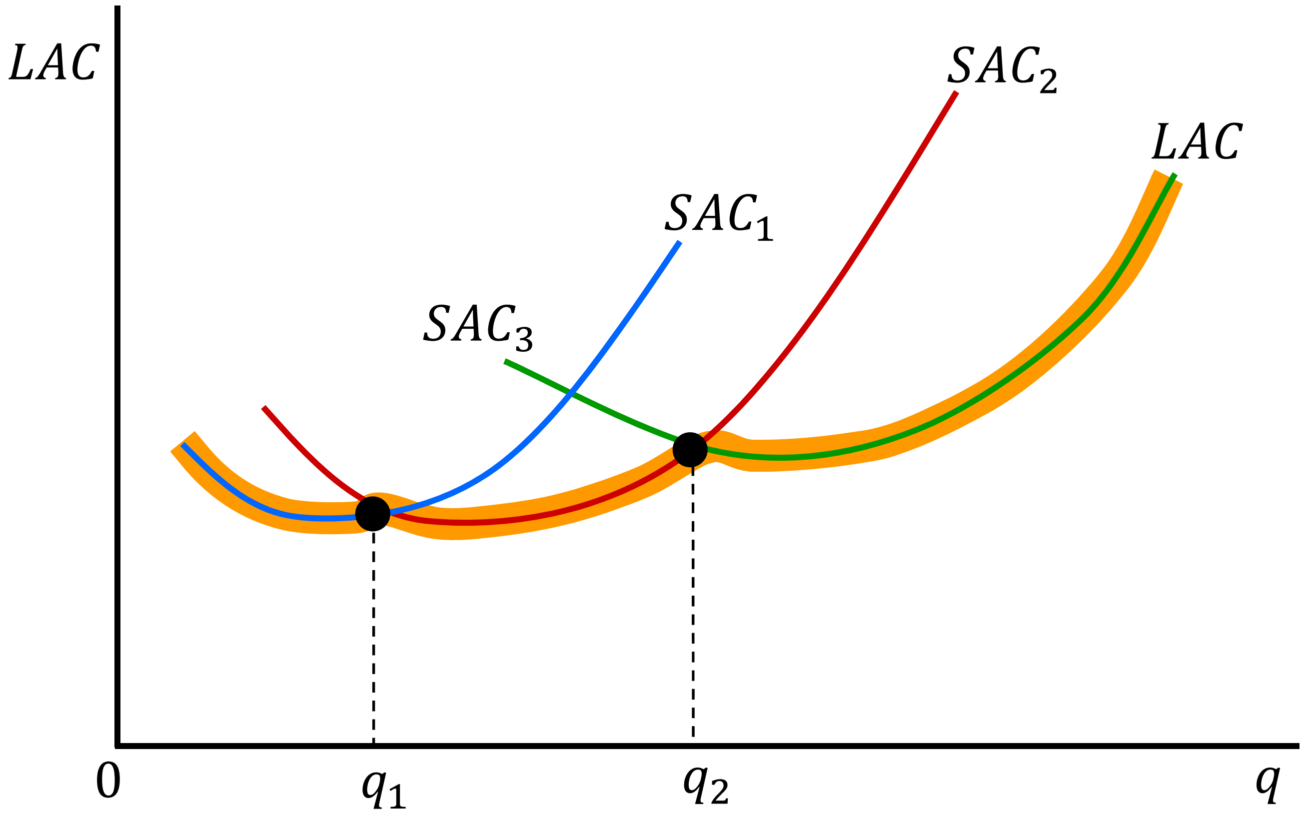


Her bir üretim düzeyi için hangi kısa dönemde (ölçekte) çalışılacağı, veri üretimin en düşük maliyetle gerçekleştirildiği ölçek büyüklüğü belirlemektedir. Yukarıdaki şekilde bunu q_1 üretim düzeyine kadar birinci kısa dönemdeki ölçek büyüklüğü sağlamakta, $q_1 - q_2$ üretim aralığında ikinci dönem, q_2'den daha yüksekteki üretim düzeyleri için üçüncü dönemde oluşturulan ölçek büyüklüğü tüm olası dönemler içerisinde toplam maliyeti en düşük hale getirmektedir.

Her bir üretim düzeyi için toplam maliyeti en düşük kılan maliyet eğrilerini kullanırsak, Şekil 102'deki uzun dönem toplam maliyet (LTC) eğrisini (sarı renkli) elde etmiş oluruz.

Yukarıdaki yaklaşımı kullanarak, uzun dönem ortalama maliyet (LAC) eğrisini de belirleyebiliriz (Şekil 103).

Şekil 103. Uzun Dönem Ortalama Maliyet



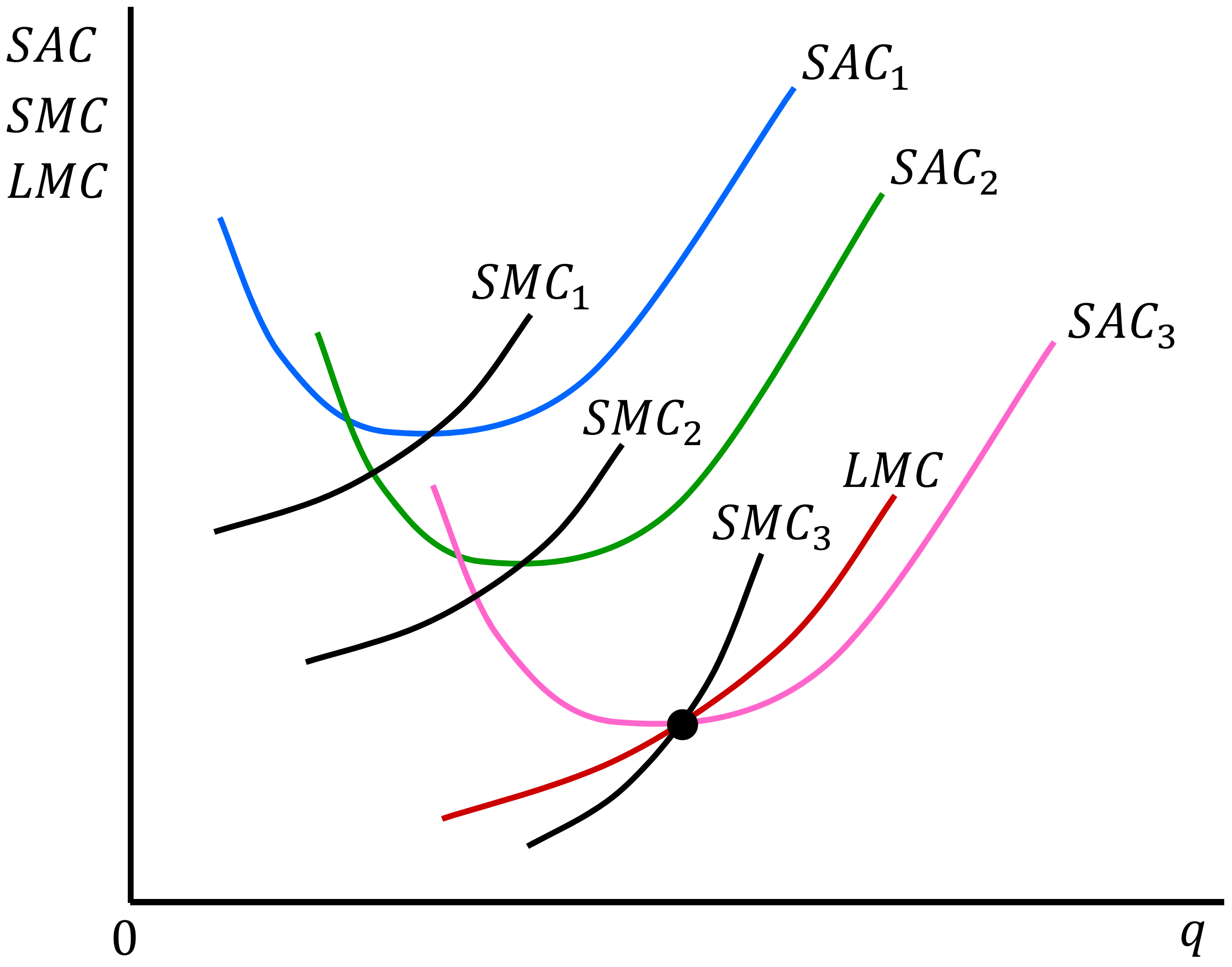
Uzun dönemde, veri bir üretim düzeyini elde etmenin toplam maliyeti, kısa dönemdekinden daha büyük olamaz. Çünkü kısa dönemde kullanabilme olanağına sahip olduğumuz herhangi bir sermaye-işgücü bileşimini, uzun dönemde de kullanabiliriz. Uzun dönemde, veri bir üretim düzeyini elde etmenin toplam maliyeti, kısa dönemde aynı ürün miktarını olanaklı en düşük maliyetle elde etmektir.

Bu anlamda uzun dönem toplam maliyet eğrisi, her bir üretim düzeyi için tüm olası kısa dönem toplam maliyetlerinin en düşük olan değerlerinden oluşmaktadır. Şekil 104'te örnek olarak yalnızca üç kısa dönem incelenmiştir. Dönem sayısını artırdığımızda, LTC'nin genel görüntüsü, STC'ye benzeyecektir.

Uzun dönem marjinal maliyetin (LMC) türetilmesi, kısa dönem marjinal maliyetin (SMC) türetilme yaklaşımıyla aynıdır. SMC, SAC'yi minimum noktasında kestiği gibi, LMC de LAC'yi minimum noktasında keser. Bu durum Şekil 104'te gösterilmiştir.

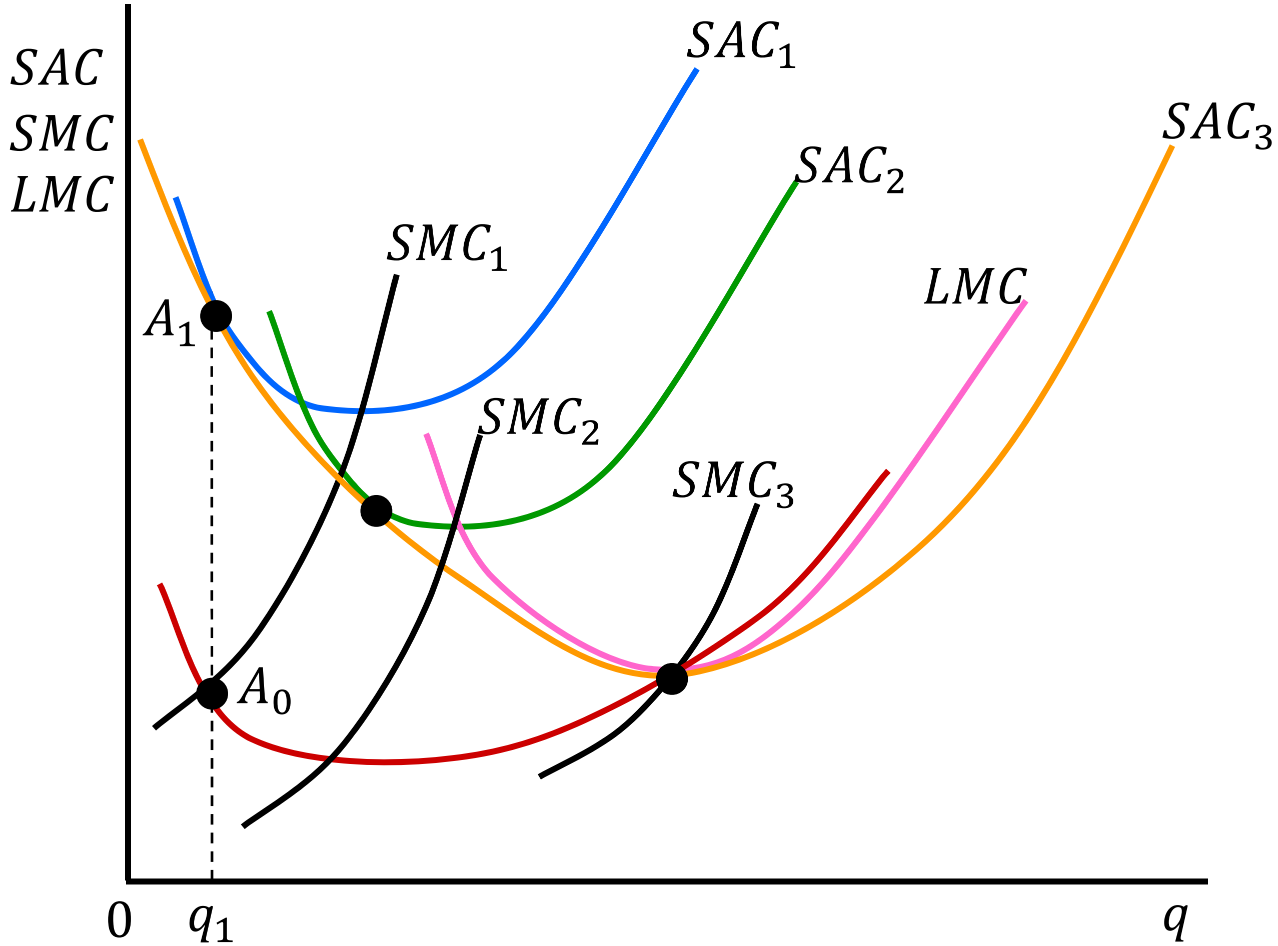
Kısa dönem ortalama maliyetin uzun dönem ortalama maliyete eşit olması durumu, marjinal maliyet için de geçerlidir. Küçük üretim miktarlarında LMC, SMC'den büyüktür. Büyük üretim miktarlarında ise bunun tam tersi doğrudur.

Şekil 104. Uzun Dönem Marjinal Maliyet



Şekil 105'te q_1 üretim düzeyini dikkate alalım. Bu üretim düzeyinde LAC eğrisi, SAC_1 eğrisine teğettir (A_1 noktası). Aynı üretim düzeyinde LMC ile SMC de eşittir (A_0 noktası). q_1 üretim düzeyinin altındaki üretim miktarlarında $LAC > SAC_1$ ve $LMC > SMC_1$'dir. $q_1$üretim düzeyinin üzerindeki üretim miktarlarında $LAC < SAC_1$ ve $LMC < SMC_1$'dir. Uzun ve kısa dönem marjinal maliyet eğrileri arasındaki bu ilişkiyi daha iyi anlayabilmek için, aşağıdaki eş-ürün ve eş-maliyet eğrilerinden yararlanalım.

Şekil 105. Uzun Dönem Marjinal Maliyet

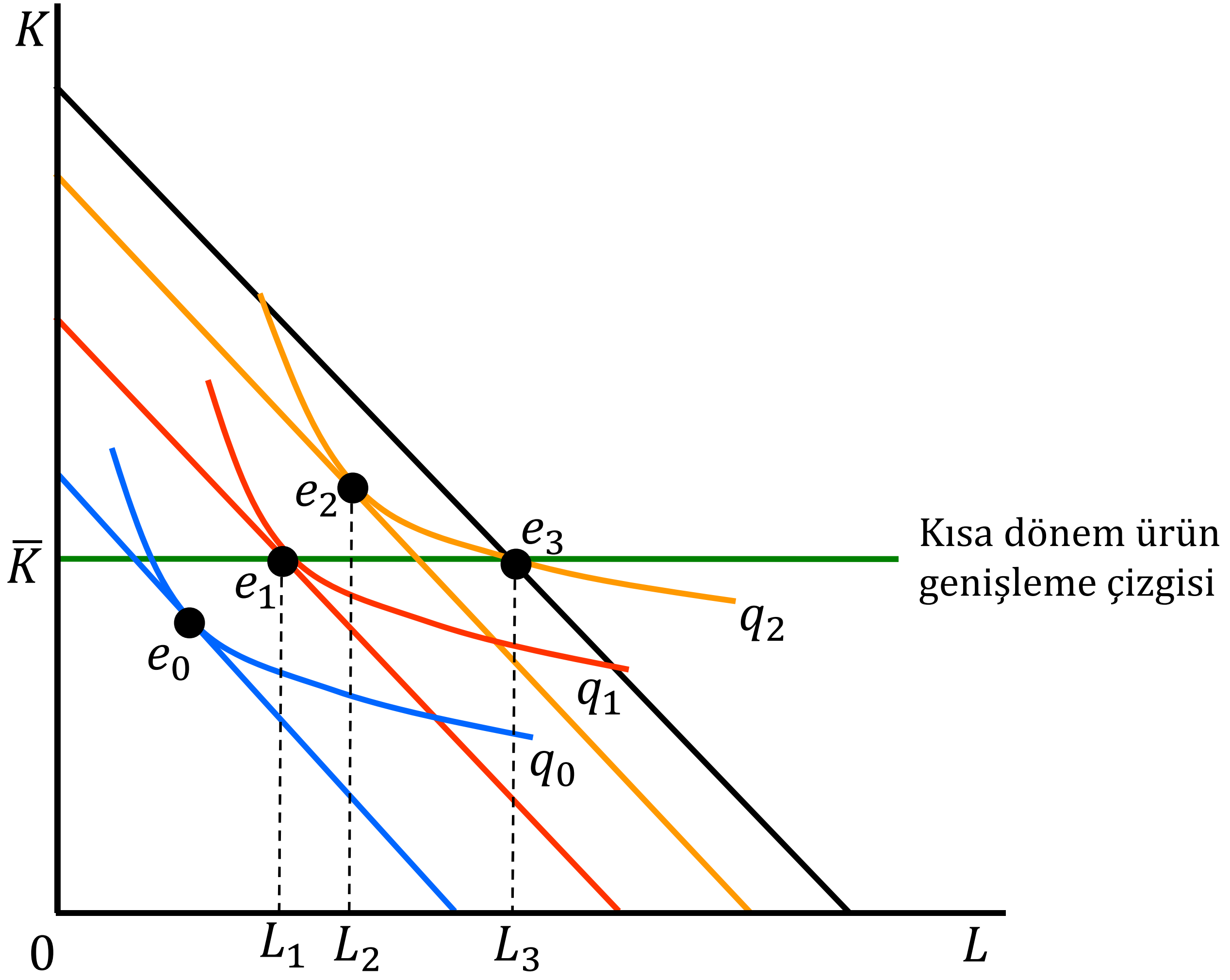


Şekil 106'ya göre üreticiyi kısa dönemde düşünelim. Üretici $\overline{K}$ kadar sabit sermaye kullanarak üretim yapacaktır. Ancak işgücü miktarını artırarak, üretim miktarını artırabilir. Üretim genişleme çizgisi $\overline{K}$ yatay çizgisidir. Üretici, $\overline{K}$ miktar sermaye ve L_1 miktar işgücü kullanarak, q_1 miktar üretim yapabilir. Bu girdi bileşimi hem kısa hem de uzun dönem optimal girdi bileşimidir. Bu noktada uzun dönem ile kısa dönemin toplam ve ortalama maliyetleri eşittir. Bu durum Şekil 106'da e_1 noktasıdır.

Üretici üretimini q_1 düzeyinden q_2 düzeyine çıkartmak isterse, her iki girdiyi de artırmak zorundadır. Ancak elimizde $\overline{K}$ kadar sermaye olduğundan, yalnızca işgücü miktarını artırmamız gerekir. Bu durum, q_1 düzeyinden az üretim düzeylerinde SMC'nin LMC'den neden küçük olduğunu açıklamaktadır. q_1 üretim düzeyinden q_2'ye geçersek, uzun dönemde sermaye de değişken faktör olacağından, optimal girdi bileşimi e_2 noktasında oluşur.

Bu durumda e_2 denge noktasında teğet olan eş-maliyet eğrisine göre harcama yapmış oluruz. Ancak kısa dönemdeysek, sermaye sabit olduğundan $\overline{K}$ düzleminde e_3 noktasına hareket ederiz ve daha yukarıda yer alan (siyah) eş-maliyet eğrisi düzeyinde bir maliyete katlanırız. Bu nedenle, q_1'den daha büyük üretim düzeylerinde SMC, LMC'den büyüktür.

Şekil 106. Kısa Dönemde Ürün Genişleme Çizgisi



Bir maliyet fonksiyonu, veri bir üretim düzeyinin en düşük maliyetle elde edilmesinin matematiksel ifadesidir. Üreticinin Cobb-Douglas tipi bir üretim fonksiyonuyla çalıştığını ve toplam sabit maliyetinin bulunmadığını varsayalım. Maliyet fonksiyonunu elde edebilmek için, üretim kısıtı altında toplam girdi harcamalarını minimize etmeye çalışırız. Bu problemi aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz :

Amaç Fonksiyonu: $min_{(K,L)}\,(rK + wL)$

Kısıt Fonksiyonu: $q_0 = AK^{\alpha}L^{\beta}$

Bu problemin Lagrange fonksiyonu şöyledir :

$$Z = (rK + wL) + \lambda\left[q_0 - AK^{\alpha}L^{\beta}\right]$$

Birinci sıra koşullar:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial Z}{\partial K} &= r - \lambda\alpha A K^{\alpha-1}L^{\beta} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{\alpha A K^{\alpha-1}L^{\beta}}{r} \\ \frac{\partial Z}{\partial L} &= w - \lambda\beta A K^{\alpha}L^{\beta-1} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{\beta A K^{\alpha}L^{\beta-1}}{w}\end{aligned}\right\} \quad \frac{K}{L} = \frac{\beta}{\alpha}\frac{w}{r}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = q_0 - A K^{\alpha}L^{\beta} = 0 \quad \rightarrow \quad q_0 = A K^{\alpha}L^{\beta}$$

Birinci sıra koşulun üç denklemini kullanarak, K ve L 'yi çözelim.

$$K^{*} = \left(\frac{q_0}{A}\right)^{\frac{1}{(\alpha+\beta)}}\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{w}{r}\right)^{\frac{\beta}{(\alpha+\beta)}}$$

$$L^{*} = \left(\frac{q_0}{A}\right)^{\frac{1}{(\alpha+\beta)}}\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{r}{w}\right)^{\frac{\alpha}{(\alpha+\beta)}}$$

Yukarıda bulduğumuz K ve L değerlerini, eş-maliyet denklemindeki yerine yazarak düzenlersek, toplam maliyet fonksiyonuna ulaşırız:

$$TC(q_0) = rK^* + wL^*$$

$$TC(q) = r\left(\frac{q_0}{A}\right)^{\frac{1}{(\alpha+\beta)}}\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{w}{r}\right)^{\frac{\beta}{(\alpha+\beta)}} + w\left(\frac{q_0}{A}\right)^{\frac{1}{(\alpha+\beta)}}\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{r}{w}\right)^{\frac{\alpha}{(\alpha+\beta)}}$$

Yukarıda bulduğumuz toplam maliyet fonksiyonu her iki girdiyi de değişken varsaydığı için, uzun dönemlidir. Şimdi de sermayeyi sabit kabul ederek (yalnızca işgücü değişken), kısa dönemdeki toplam maliyet fonksiyonunu belirleyelim. Bunun için yukarıdaki matematiksel çözümün aynısını kullanacağız.

Amaç Fonksiyonu: $min_{(L)}\,(r\overline{K} + wL)$

Kısıt Fonksiyonu: $q = A\overline{K}^{\alpha}L^{\beta}$

Bu problemin Lagrange fonksiyonu şöyledir :

$$Z = (r\overline{K} + wL) + \lambda\left[q - A\overline{K}^{\alpha}L^{\beta}\right]$$

Birinci sıra koşullar :

$$\frac{\partial Z}{\partial L} = w - \lambda\beta A\overline{K}^{\alpha}L^{\beta-1} = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = q - A\overline{K}^{\alpha}L^{\beta} = 0 \quad \rightarrow \quad q = A\overline{K}^{\alpha}L^{\beta} \quad \rightarrow \quad L^{*} = \left(\frac{q}{A\overline{K}^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

Kısa Dönem Toplam Maliyet Fonksiyonu:

$$STC(q) = r\bar{K} + wL^*$$

$$STC(q) = \underbrace{r\bar{K}}_{TFC} + \underbrace{w\left(\frac{q}{A\bar{K}^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\beta}}}_{TVC}$$

Şimdi de sırasıyla kısa dönem ortalama (SAC) ve marjinal (SMC) maliyetleri bulalım.

$$SAC(q) = \frac{STC(q)}{q} = \frac{r\bar{K}}{q} + \frac{w\left(\frac{q}{A\bar{K}^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\beta}}}{q} \quad \rightarrow \quad SAC(q) = \frac{r\bar{K}}{q} + \frac{w}{(A\bar{K}^{\alpha})^{\frac{1}{\beta}}}\left(q^{\frac{1-\beta}{\beta}}\right)$$

$$SMC(q) = \frac{\partial STC(q)}{\partial q} = \frac{1}{\beta}\frac{w}{(A\bar{K}^{\alpha})^{\frac{1}{\beta}}}\left(q^{\frac{1-\beta}{\beta}}\right)$$

Örnek: Optimal istihdam ve üretimin belirlenmesi

Toplam sabit maliyeti $TFC = 85$ birim olan bir firmanın elinde 1300 birim tutarında bir toplam finansman olanağı vardır. Üretim faktörlerini saat başına $r = 30$ ve $w = 5$ birim fiyattan istihdam eden bu firmanın üretim fonksiyonu da şöyledir:

$$q = 4K^{0.4}L^{0.2}$$

$$TC = TFC + TVC \quad \rightarrow \quad TVC = TC + TFC = 1300 - 85 = 1215$$

$$TVC = rK + wL \quad \rightarrow \quad 1215 = 30K + 5L$$

$$Z = q(K, L) + \lambda[TVC - rK - wL]$$

$$Z = 4K^{0.4}L^{0.2} + \lambda[1215 - 30K - 5L]$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial Z}{\partial K} &= 1.6K^{-0.6}L^{0.2} - 30\lambda = 0 \\
\frac{\partial Z}{\partial L} &= 0.8K^{0.4}L^{-0.8} - 5\lambda = 0 \\
\frac{\partial Z}{\partial \lambda} &= 1215 - 30K - 5L = 0
\end{aligned}\right\} \; K^* = 27 \;,\; L^* = 81 \;,\; q^* = 36$$